

伝送システム理論

Transmission system theory

古川 靖

埼玉工業大学 工学部 情報システム学科

目次

講義	内容	日付	PDF ページ	講義	内容	日付	PDF ページ
第1講	伝送システムの概要	4/16	13	第8講	位相変調・周波数変調	6/18	233
第2講	フーリエ級数	4/23	35	第9講	標本化と量子化	6/25	261
第3講	フーリエ変換	4/30	73	第10講	パルス符号変調	7/02	289
第4講	スペクトルと信号処理	5/14	105	第11講	デジタル変調方式	7/09	327
第5講	確率過程と雑音	5/21	137	第12講	デジタル通信 最適受信	7/16	357
第6講	通信路容量	6/04	173	第13講	デジタル通信 伝送特性	7/23	389
第7講	振幅変調	6/11	203	第14講	伝送システムの線路	7/30	419
							440

◆教授 古川 靖 (Osamu Furukawa)

◆連絡先 : furukawa@sit.ac.jp

◆研究室 : 19号館1階1914

◆テキスト : 右の二次元コードに
学内LANから入り、
「授業関連情報」の
リンク先からダウンロード。



- ◆ 選択科目、2単位
- ◆ 授業14回、出席2/3以上必要
- ◆ 定期試験100%
- ◆ 関連科目（未履修でも本科目を受講可）
 - 2年：数理解析(フーリエ変換)
 - 2年：デジタル信号処理(畳み込みとインパルス応答)

- ◆出席：授業開始前までに学生証をタッチ。
学生証を忘れたら、**授業前**に学籍番号と名前をメモ用紙に書いて提出して下さい。
- ◆欠席：30分以上遅刻は欠席扱いとします。
教務課の押印した届出用紙は受理します。
- ◆トイレ：申告不要、静かに行ってきて。

◆授業中：

① 食事禁止（音、臭いが周りの迷惑）

② 立ち歩き禁止

（遅刻したら端の方へそっと着席しなさい。

講義中に、教壇へ話しに来ないで。）

③ 私語（ヒソヒソ話程度にしなさい。）

常識的な範囲の行動を求めます。

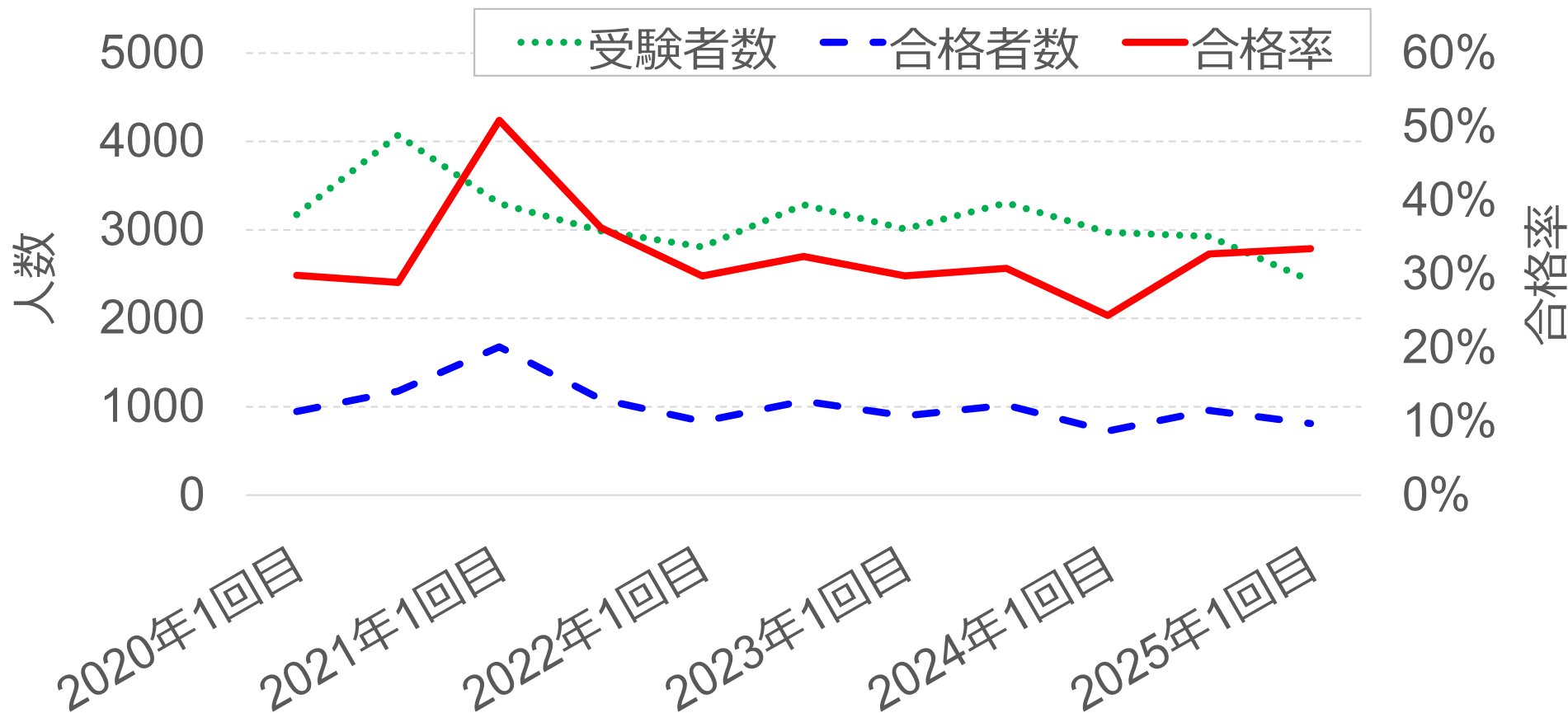
◆電気電子専攻でサポートしている4資格。

	電気の資格 (経産省)	通信の資格 (総務省)
上位資格 (難しい)	電気主任技術者 (認定校)	電気通信主任技術者
下位資格 (易しい)	電気工事士	工事担任者

- ◆ 電気通信主任技術者は、総務省所管の
国家資格。 (工事担任者よりも上位の資格)
- ◆ 資格には2種類ある。
 - 伝送交換主任技術者資格
 - 線路主任技術者資格
- ◆ 本科目では、電気通信主任技術者試験
の内容にも触れながら講義する。



◆ 平均合格率は 22%（2025年12月時点）



◆ 詳細は [日本データ通信協会](#) のWeb参照

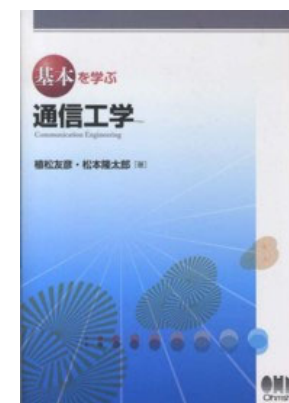




- 守倉正博、『通信方式』
オーム社、2013年
ISBN-13: 978-4-274-21473-8



- 植松友彦・松本隆太郎、『基本を学ぶ通信工学』
オーム社、2012年
ISBN-13: 978-4-274-21311-3

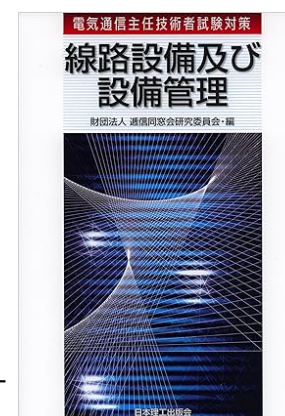


- 大下真二郎、『デジタル通信』
共立出版、2016年
ISBN-13: 978-4-320-08645-6



表紙画像の著作権は各出版社のものです

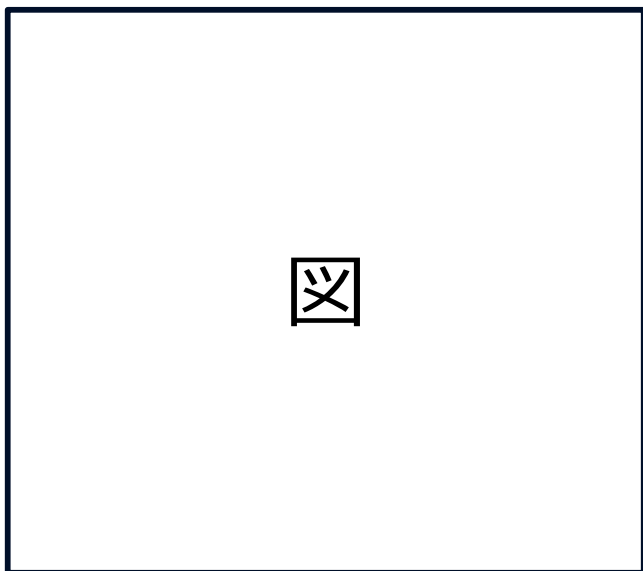
- 『電気通信主任技術者試験 これなら受かる 電気通信システム』
オーム社、2023年
ISBN-13: 978-4-274-23031-8
- 『電気通信主任技術者試験
これなら受かる伝送交換設備及び設備管理』
オーム社、2023年、ISBN-13: 978-4-274-23033-2
- 逓信同窓会研究委員会、
『線路設備及び設備管理: 電気通信主任技術者試験対策』
日本理工出版会、2011年
ISBN-13: 978-4-890-19286-1



表紙画像の著作権は各出版社のものです



■ 説明文



参考資料の
2次元コード

教科書のページ数

引用している図表等の
著作権にかかる出典の表示等

出展：『タイトル』, 版元, 出版年.
URL:https://~~~~~.com

講義番号

電気通信主任技術者試験の出題
試験科目：シス(電気通信システム)

講義内のページ番号

伝送システム理論

Transmission system theory

第1講 伝送システムの概要

Lecture 1: Transmission system overview



古川 靖

埼玉工業大学 工学部 情報システム学科

目次

1. 伝送とは
2. 伝送の歴史
3. 伝送システムの概要

伝送とは (1)

伝 = 人 + 亼 (専)



ヒトが背負って運ぶ

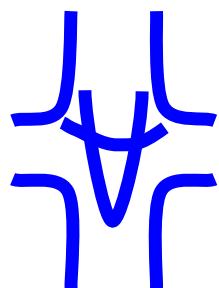


袋に詰めて紐で縛る + 右手

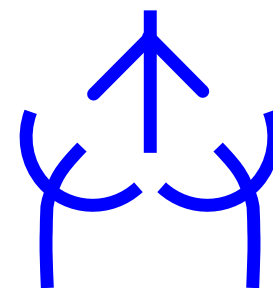
形を変えて人から人へ受け渡す

注. 亼や専は旧字から新字になるときに略字として用いられた。参考：岡本、『常用漢字字體考』

送 = 辵 + 关 ^{せん・ぜん} (弁, 弁)



十字路を足が歩く



両手で持ち上げる

何かを持ち運んで届ける

注. 关の語源を關とみる説もある。また、両手で持ち上げることから贈り物の意とする説もある。

◆ 伝送（＝伝える＋送る）とは、

形を変えて別の場所へ移動すること

例) データ伝送

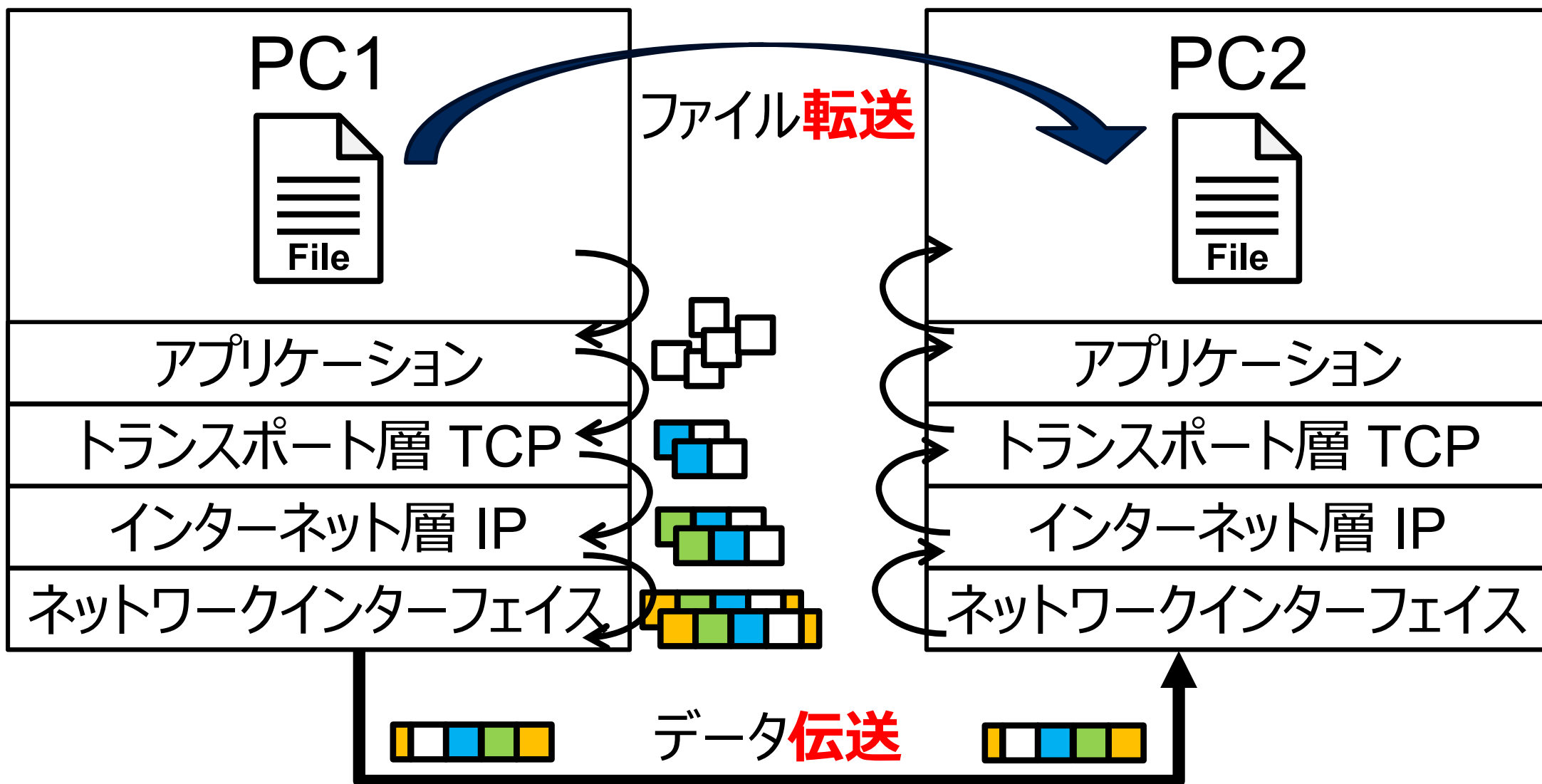
◆ 形を変えない移動は、転送という。

例) ファイル転送

◆ 英語ではいずれも Transmission。



伝送とは (4)



伝送媒体：無線 (WiFi) , 有線 (イーサネット, 光ファイバ)

伝送とは（5）

◆ 本講義で扱うのは**青枠**の部分であり、

これを伝送工学、通信工学ともいう。

◆ 上位レイヤーは別科目『データ通信』。

ネットワークインターフェイス



ネットワークインターフェイス



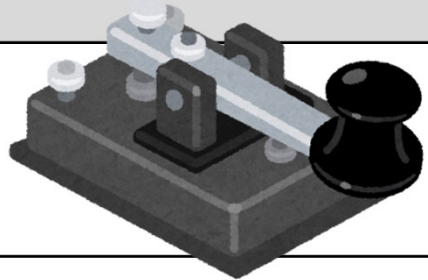

データ**伝送**



伝送媒体：無線（WiFi），有線（イーサネット，光ファイバ）

目次

1. 伝送とは
2. 伝送の歴史
3. 伝送システムの概要

西暦年	式
1835	モールスが電信機を発明。 
1876	グラハム・ベルが電話を発明。
1901	マルコーニが無線電信実験に成功。
1920	米国でAMラジオ放送開始。 
1925	テレビジョンの発明。


西暦年	式
1940年代	超短波・極超短波帯のラジオが発達
1948	ショックレーらがトランジスタを発明。
1960	メイマンガルビーレーザの発振に成功。
1966	カオが光ファイバの低損失化に成功。
1980年代	光ファイバ伝送の商用化。

伝送の歴史（3）

西暦年	式
1983	TCP/IPの標準化、インターネット提唱
1993	日本で商用インターネットが開始。
1997	無線LANの規格 IEEE 802.11 発行。
2001	日本で光ファイバが家庭へ普及。
2010年代	スマートフォンの普及。

目次

1. 伝送とは
2. 伝送の歴史
3. 伝送システムの概要

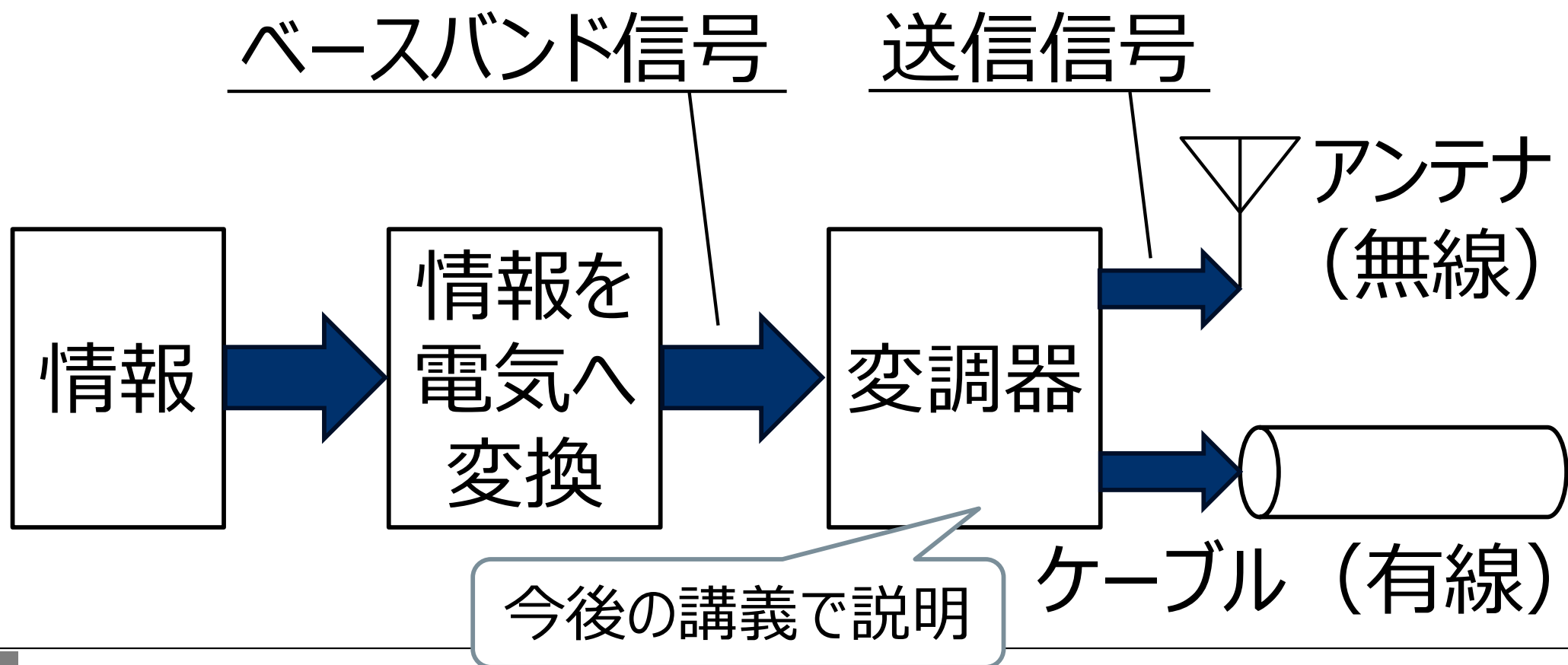
- ◆ 伝送システムは、3つの要素で構成される。
- 送信機（Transmitter）
- 線路（伝送路、Transmission Line）
- 受信機（Receiver、Responderともいう）



注. 送受信できる部品をトランスポンダ (Transponder) ともいう。

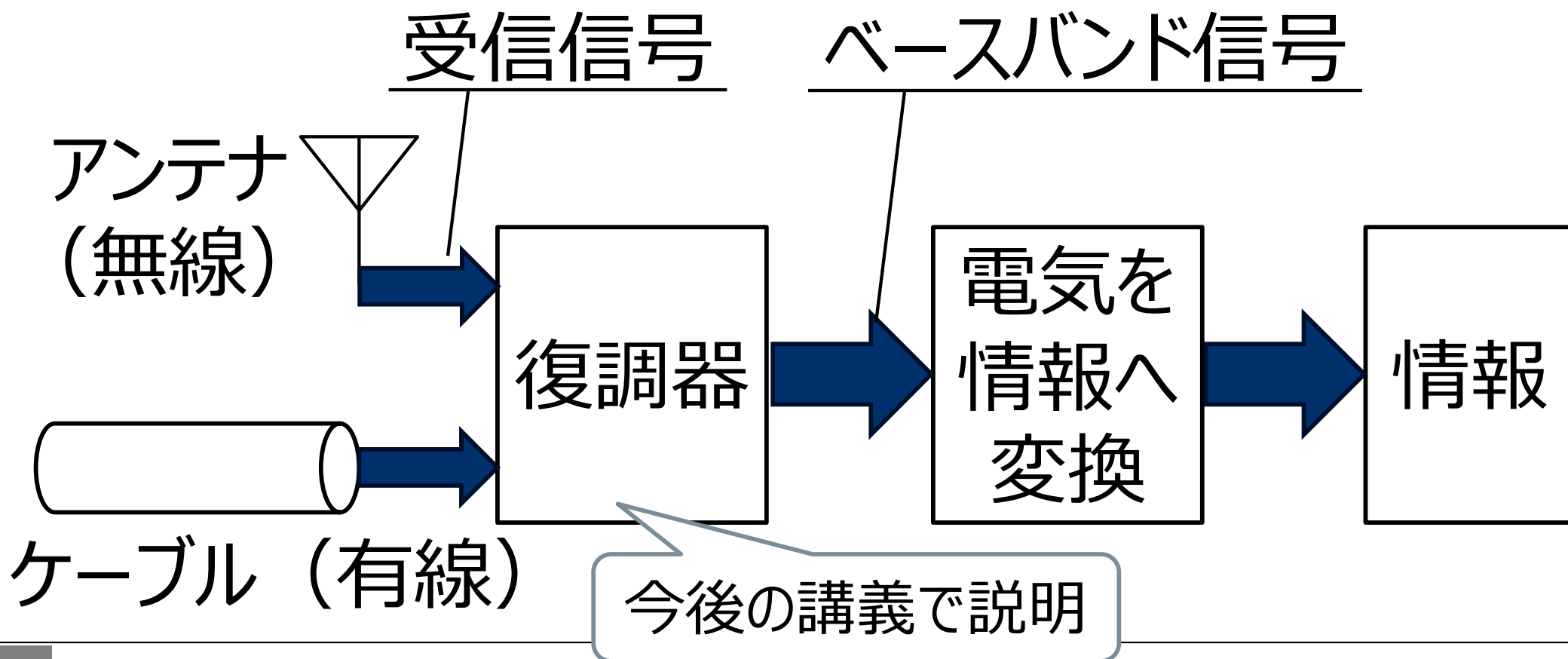
◆送信機

電波、電気、光の信号で、形を変えて伝送。



◆受信機

伝送された信号から、元の情報を抽出する。

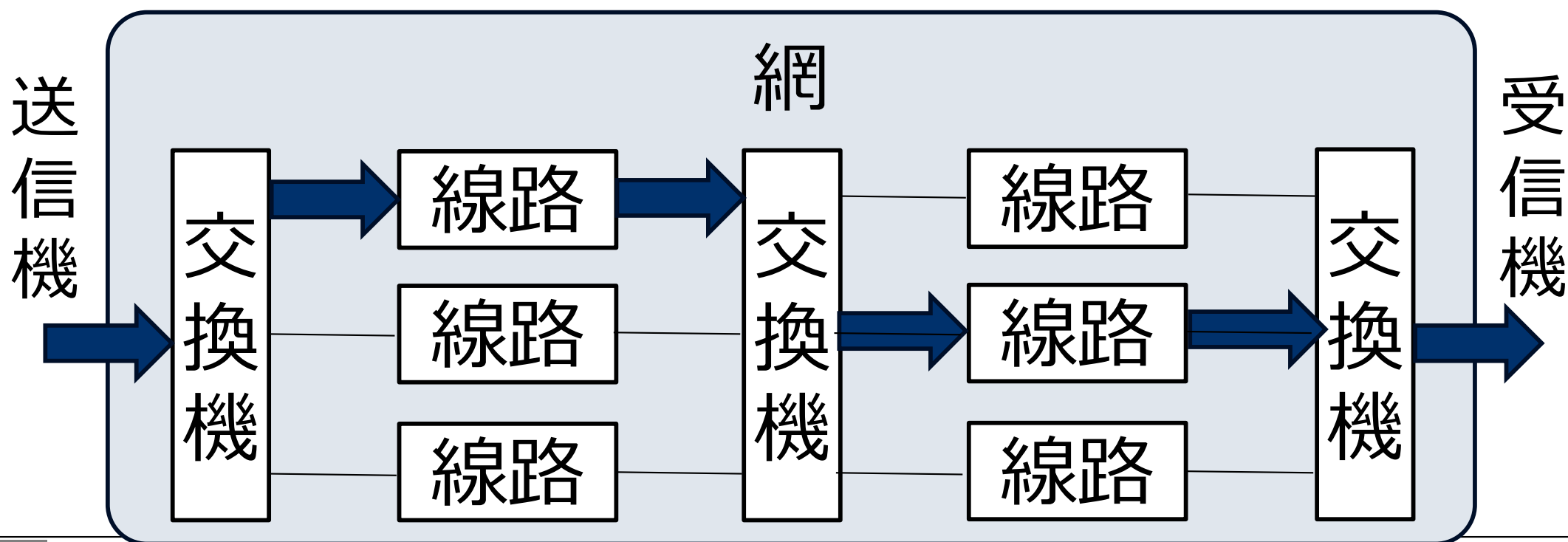


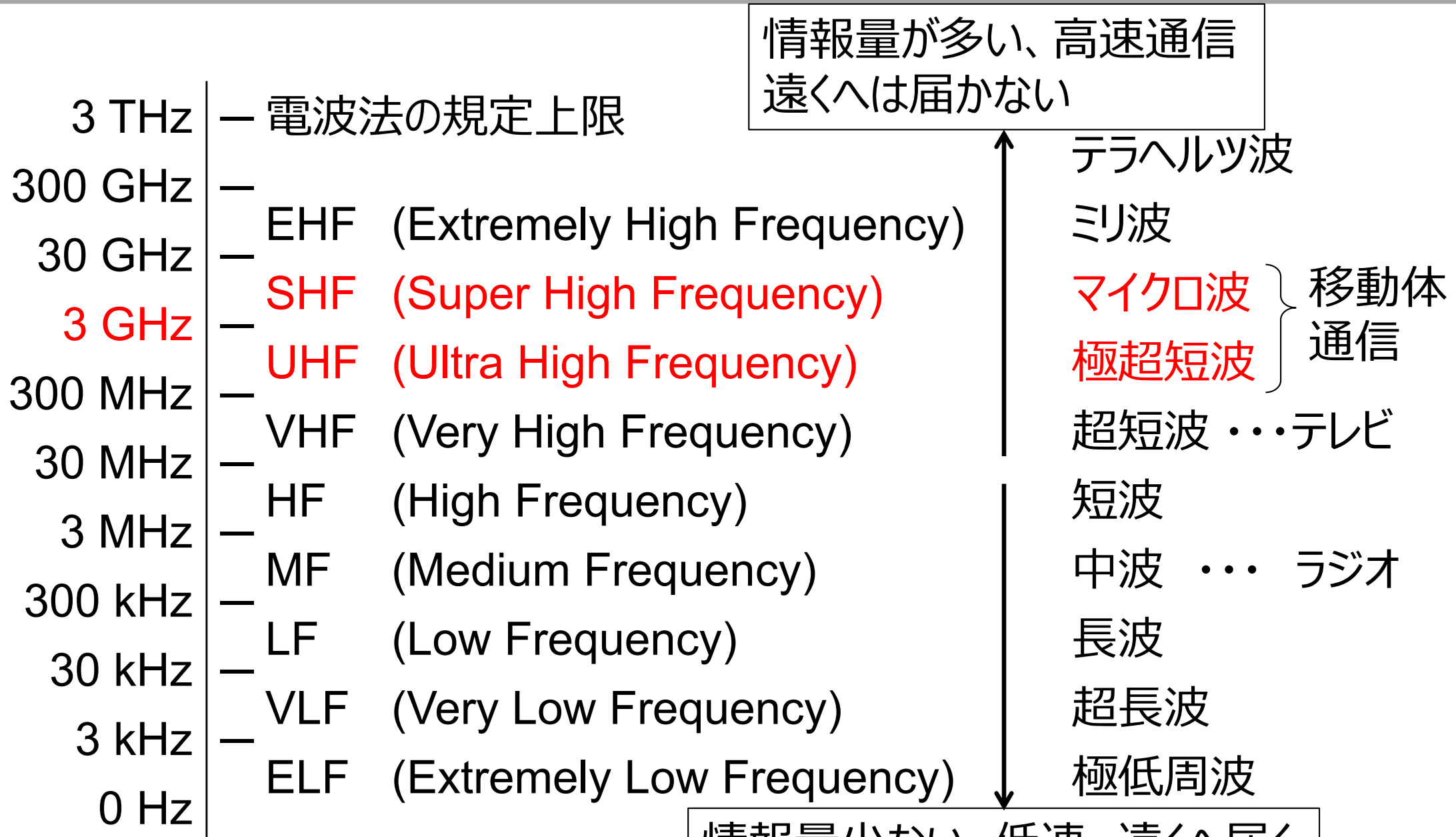
◆線路

線路	光ファイバ	メタリックケーブル	自由空間
分類	有線		無線
進み方	ケーブルに沿う		拡がる
伝送損失	0.2 dB/km	数 dB/km	距離の二乗で減衰
耐雑音性	雑音に強い	電磁波干渉あり	
敷設工事	コストが高い		影響なし

◆ 網 および 交換機

交換機(Switch)で複数線路を切り替えて、
網(Network)を構成する。

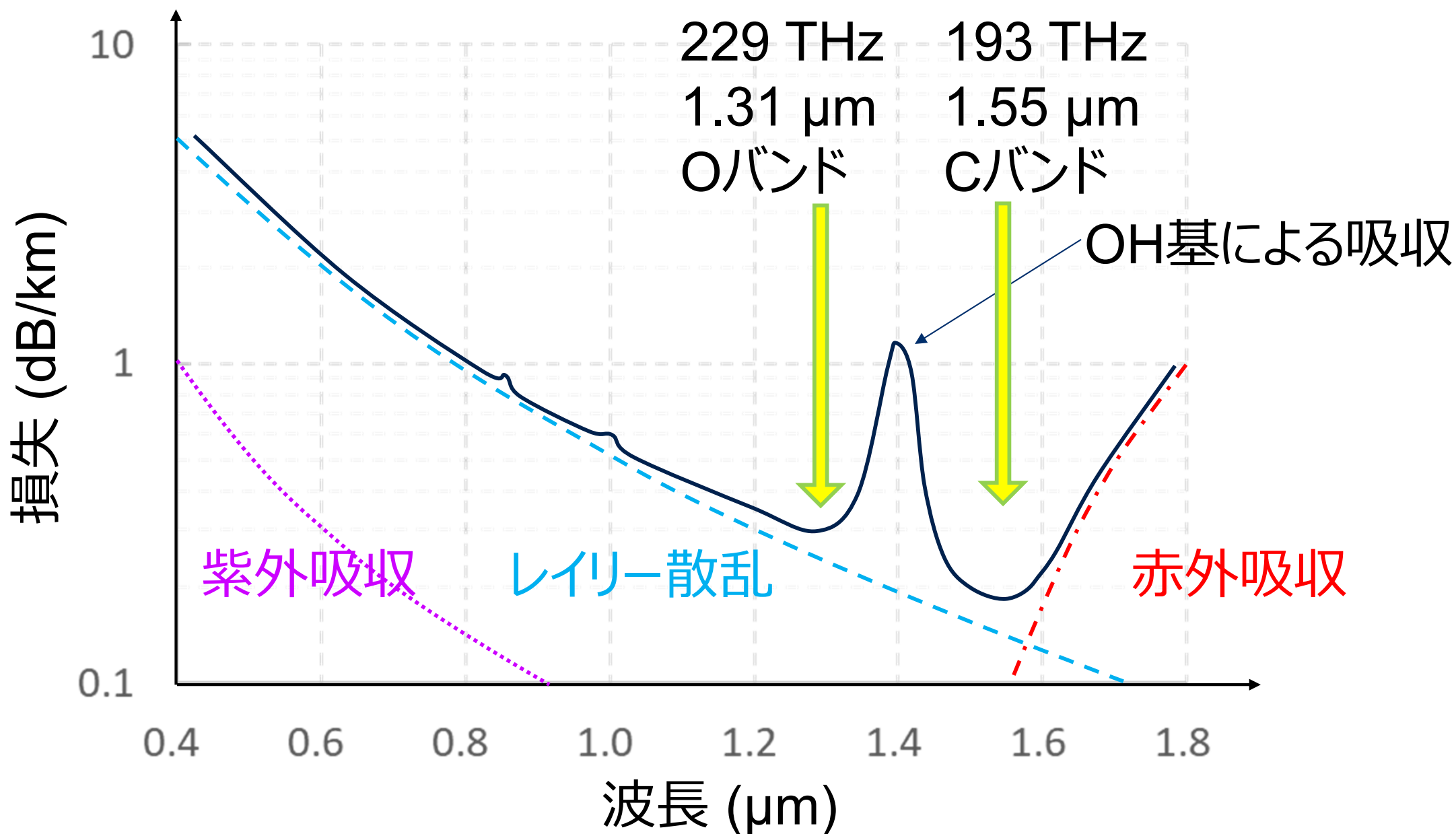




情報量が多い、高速通信
遠くへは届かない

情報量少ない、低速、遠くへ届く

光波の利用

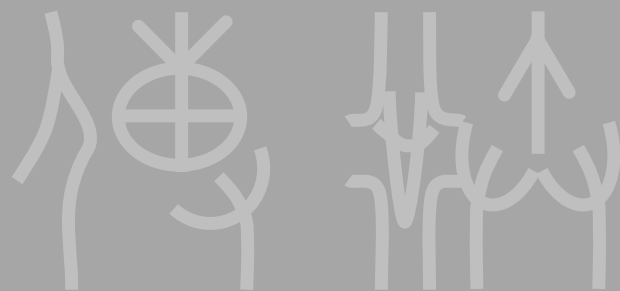




◆ 空欄にはいる言葉を答えなさい。

線路には、有線と無線の2種類がある。有線の伝送路である光ファイバでは、最も損失の少ない周波数 ① THzの光波が用いられている。一方の無線伝送路は、スマートホンの移動通信に利用されており、電波の周波数は ② GHz 前後である。

Thank you.



伝送システム理論

Transmission system theory

第2講 フーリエ級数

Lecture 2: Fourier series



古川 靖

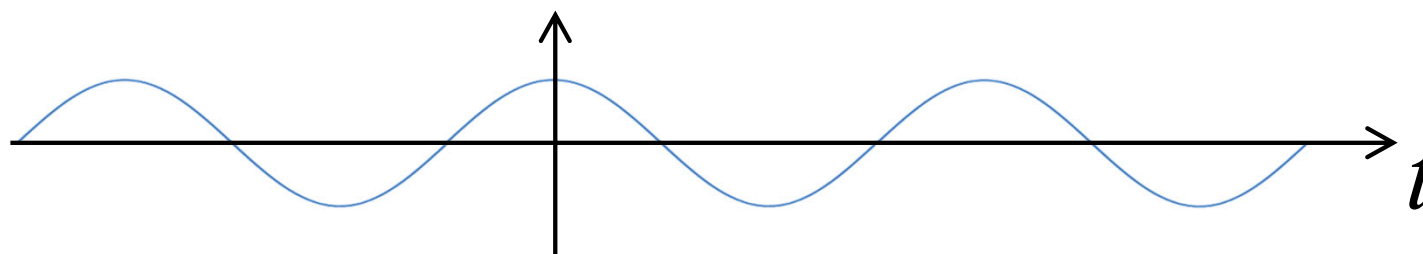
埼玉工業大学 工学部 情報システム学科

目次

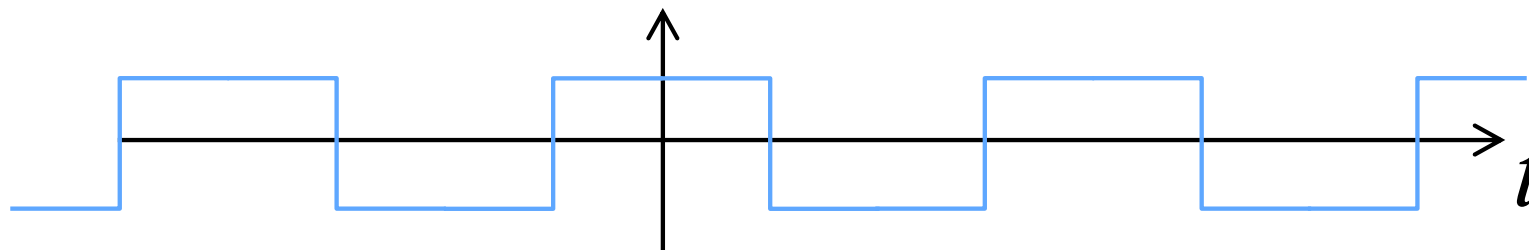
1. 時間と周波数の変換
2. フーリエ級数
3. フーリエ級数展開
4. 信号空間

- ◆ 伝送する信号は、時間とともに変化する。
これを時間軸波形（Waveform）という。

- アナログ信号

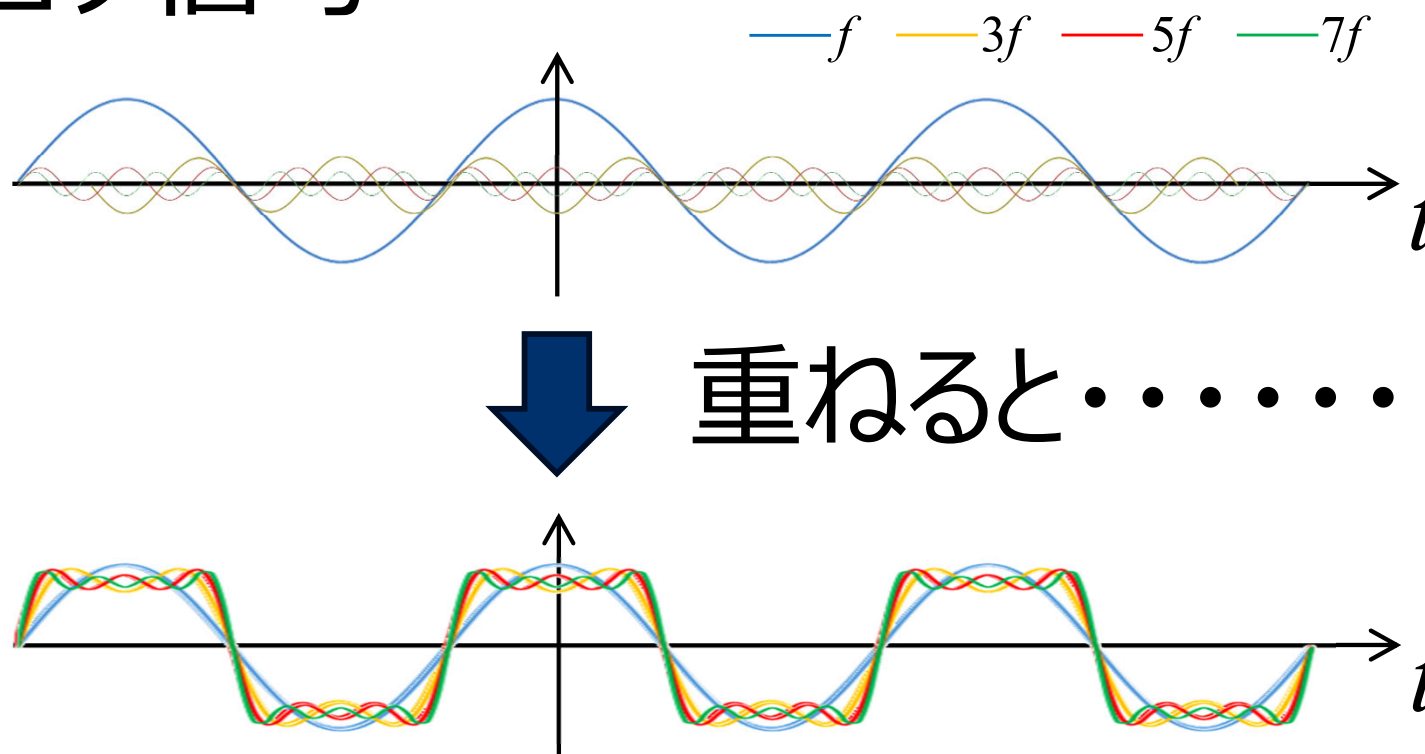


- デジタル信号



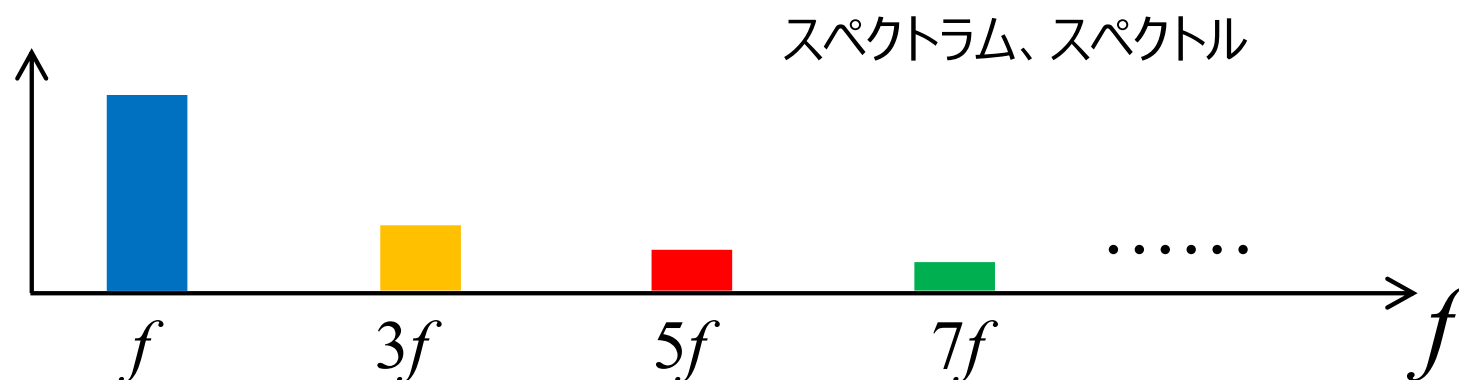
◆ デジタル信号は、複数のアナログ信号の重ね合わせと同等である。

• アナログ信号



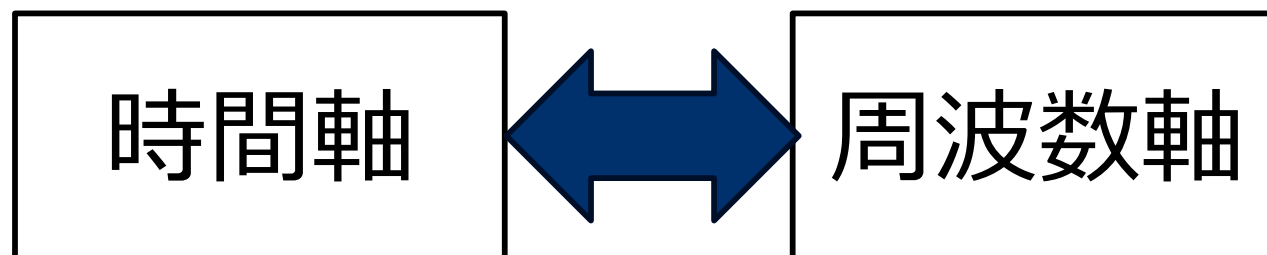
- ◆ アナログでも、デジタルでも、伝送信号は、複数の周波数成分を含んでいる。

（横軸が周波数の図をSpectrumという）



- ◆ 電波、光波ともに使用可能な周波数帯は限られているので.....

- ◆ 伝送（通信）の理論を考えるには、時間軸波形のWaveformだけでなく、周波数軸波形のSpectrumを考える必要がある。

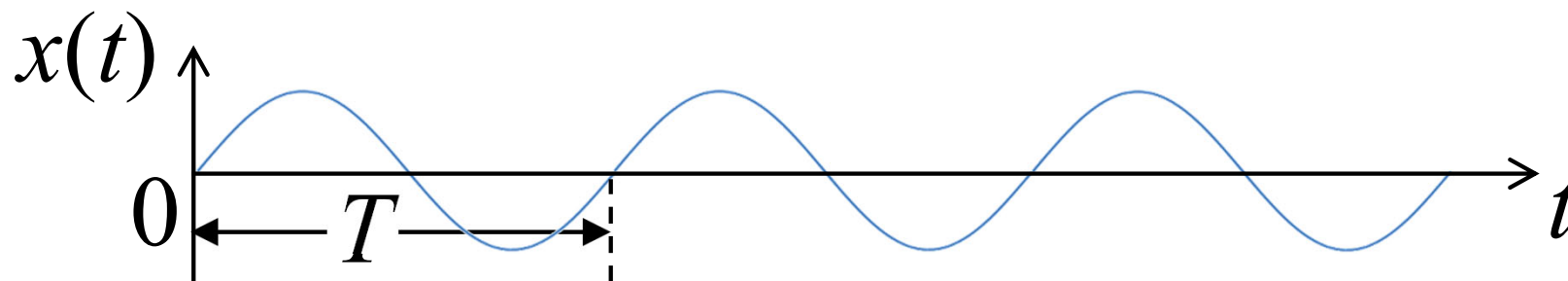


- ◆ どうやったら、変換できる？

目次

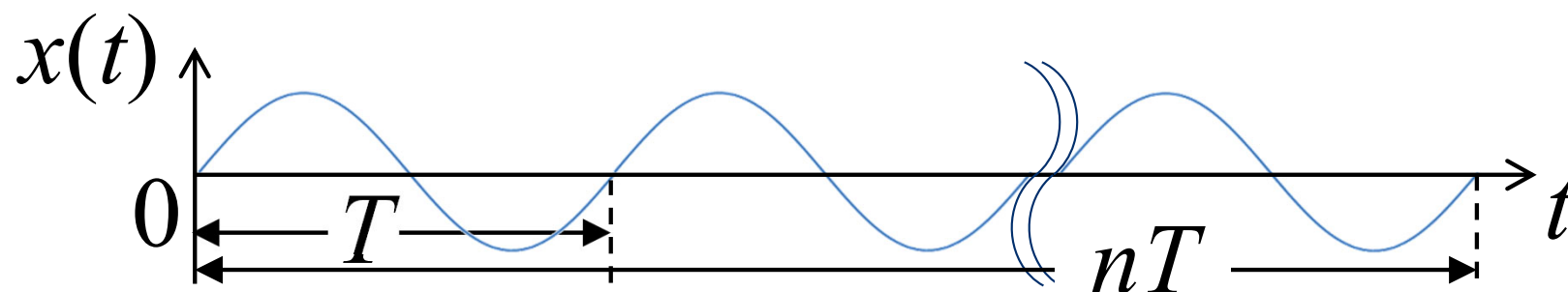
1. 時間と周波数の変換
2. フーリエ級数
3. フーリエ級数展開
4. 信号空間

- ◆ 時間 t に対して変化する信号 $x(t)$ について、 $x(t) = x(t + T)$, $T > 0$ が成り立つとき、この信号は**周期**(period) T ごとに繰り返す周期信号である。



- ◆ 1秒間の繰り返し回数を**周波数**(frequency) f といい、 $f = 1/T$ である。

- ◆ T の整数倍(n 倍)で同じ値になるので、
 $x(t) = x(t + T) = x(t + 2T) = \dots = x(t + nT)$ だから、周期は nT とも言える。



- ◆ 最小の周期 T を**基本周期**、それに対する周波数 f を**基本周波数**という。

- ◆ 信号 $x(t)$ は正弦波と呼ばれる。sin と cos は簡単に変換できるため同様である。

$$x(t) = A \sin(2\pi f t + \theta) \quad (2-1)$$

- ◆ 信号 $x(t)$ の電力(power)は次の式で表される。

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt \quad (2-2)$$

1周期分を積分して平均

式番号は教科書と異なります

- ◆ 矩形波や三角波などの周期信号 $x(t)$ (基本周期 T で電力 $P_x < \infty$ とする) は、基本周波数 f の整数倍 (n 倍) の正弦波の和で表される。

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi nft) + b_n \sin(2\pi nft)] \quad (2-3)$$

三角フーリエ級数

ここで、 a_0, a_n, b_n ($n > 0$) は実数である。

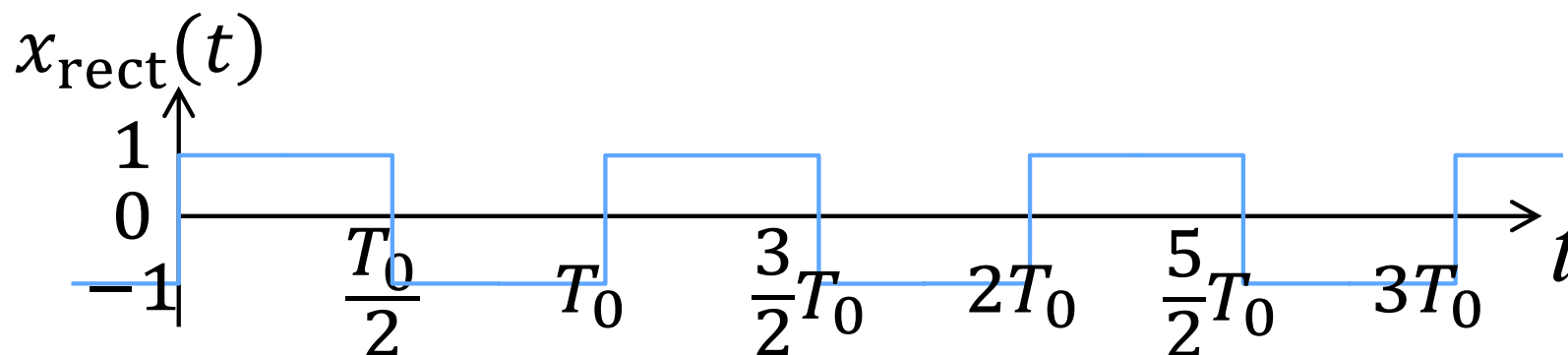
- ◆ 高等学校の数学では、級数とは数列の項の和である。和は Σ 記号で表される。
- ◆ 時間変化しない直流成分(0次正弦波)と、時間変化する交流成分(基本波および n 次高調波)から成る。

直流成分

交流成分(三角関数の和)

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi nft) + b_n \sin(2\pi nft)] \quad (2-3)$$

- ◆ 基本周期 T_0 の矩形波 $x_{\text{rect}}(t)$ を、フーリエ級数で表す。



$$\begin{aligned}
 x_{\text{rect}}(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin[2\pi(2m+1)ft] \\
 &= \frac{4}{\pi} \sin(2\pi ft) + \frac{4}{3\pi} \sin(6\pi ft) + \dots
 \end{aligned}$$

◆ オイラーの公式

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad (2-5)$$

電気電子工学分野では i を電流の記号に使うので、かわりに $j = \sqrt{-1}$ を虚数として使う。

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad (2-6a)$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad (2-6b)$$

◆ 三角フーリエ級数を、指数で書き換える。

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - jb_n)e^{j2\pi nft} + (a_n + jb_n)e^{-j2\pi nft}] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi nft} \quad \text{(指数)フーリエ級数} \quad (2-7)
 \end{aligned}$$

ここで、 $n = 0$ のとき $c_n = \frac{1}{2} a_0$ 、

$n > 0$ のとき $c_n = a_n - jb_n$ 、

$n < 0$ のとき $c_n = a_n + jb_n$ 。

右辺は複素数だから
信号 $x(t)$ は複素数
を扱えるようになった

複素共役

- ◆ 複素共役とは、実数部が同じで、虚数部の符号が逆になっている関係である。
- ◆ * 記号を右肩につけることで、複素共役を表す。

$$(a_n + jb_n)^* = a_n - jb_n \quad (2-8a)$$

$$(a_n - jb_n)^* = a_n + jb_n \quad (2-8b)$$

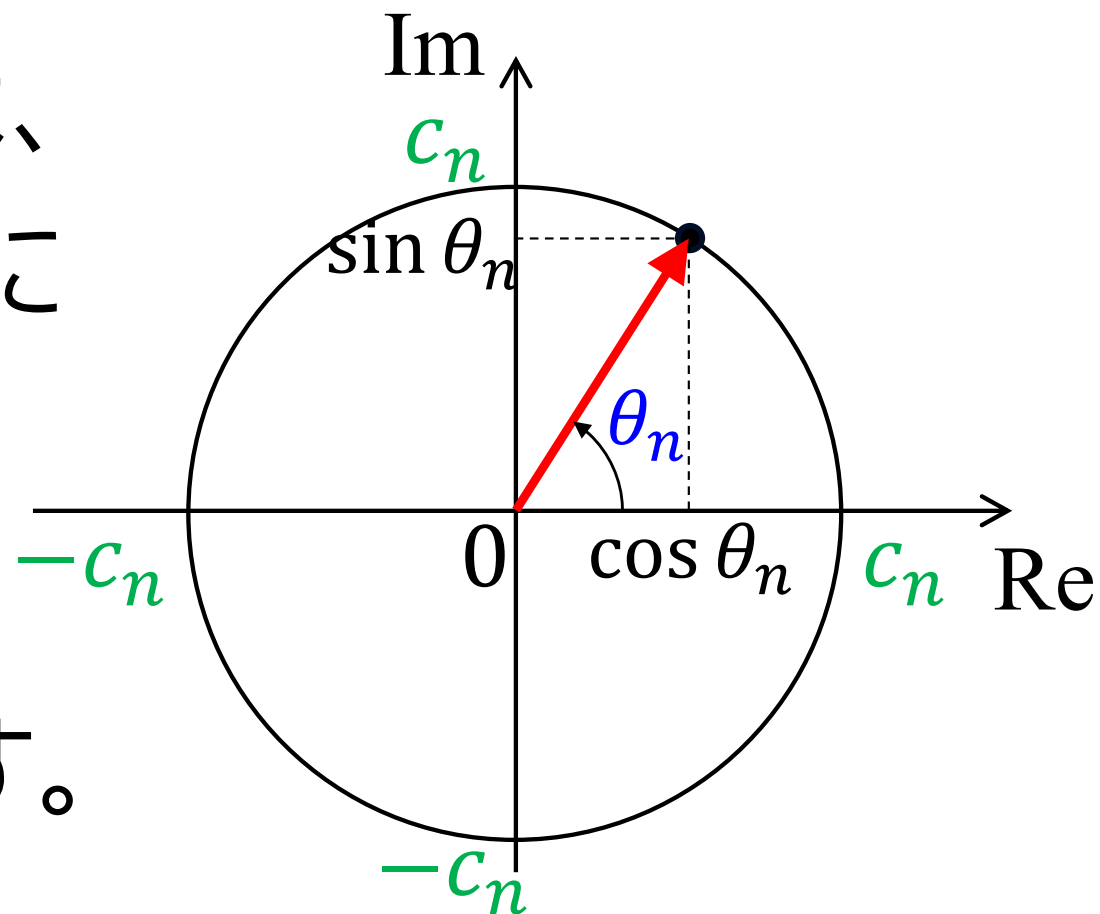
- ◆ 複素数の絶対値(の2乗)は、複素共役を用いて次のように表せる。

$$|a_n \pm jb_n|^2 = (a_n \pm jb_n)(a_n \pm jb_n)^* \quad (2-9)$$

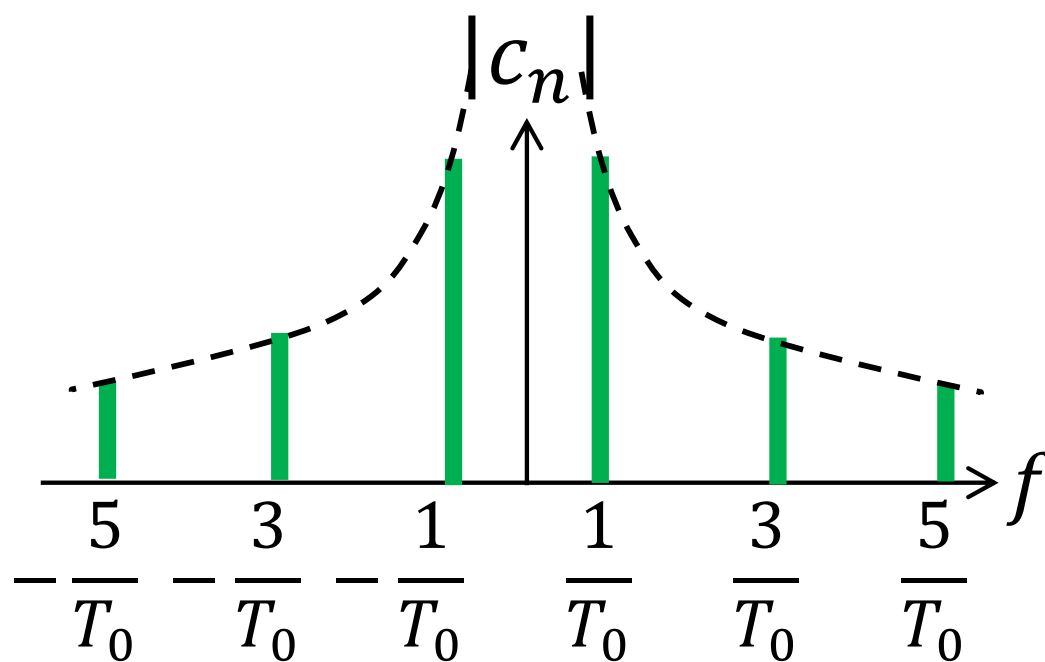
- ◆ 式(2-3) に式(2-6a), (2-6b)を代入し、式を変形して、式(2-7)を導出しなさい。



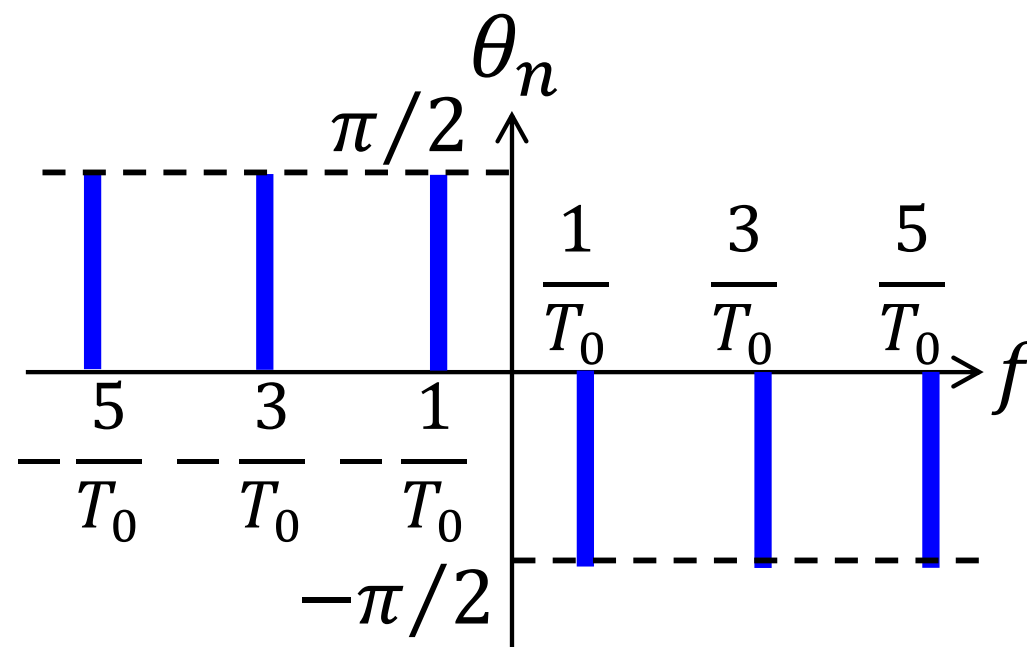
- ◆ $e^{j2\pi nft} = e^{j\theta_n} = \cos \theta_n + j \sin \theta_n$ は、
 複素平面の赤いベクトルを表す。
 ベクトルが指す点は、
 時間 t の変化とともに
 円運動する。
 実数軸、虚数軸
 における振動を表す。



- ◆ フーリエ級数は、振幅が $|c_n|$ 、位相が $\theta_n = 2\pi nft$ の振動の和である。
- ◆ 離散的な線スペクトルの集合を表す。



$x_{\text{rect}}(t)$ の振幅スペクトル



$x_{\text{rect}}(t)$ の位相スペクトル

◆ フーリエ係数は、

$$n > 0 (f > 0) \text{ のとき } c_n = a_n - jb_n$$

$$n < 0 (f < 0) \text{ のとき } c_n = a_n + jb_n$$

であることを思い出すと、
スペクトルにおいて

$|c_n|$ は左右で線対称 (偶関数)、

θ_n は原点に対し点対象 (奇関数)
になる。

目次

1. 時間と周波数の変換
2. フーリエ級数
3. フーリエ級数展開
4. 信号空間

◆ 信号を、**振幅**と**位相**をもったフーリエ係数 c_n の和として表すことを、**フーリエ級数展開** という。

◆ 三角フーリエ級数の係数を求める式

余弦
係数

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(2\pi nft) dt \quad (2-10a)$$

偶関数

正弦
係数

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(2\pi nft) dt \quad (2-10b)$$

奇関数

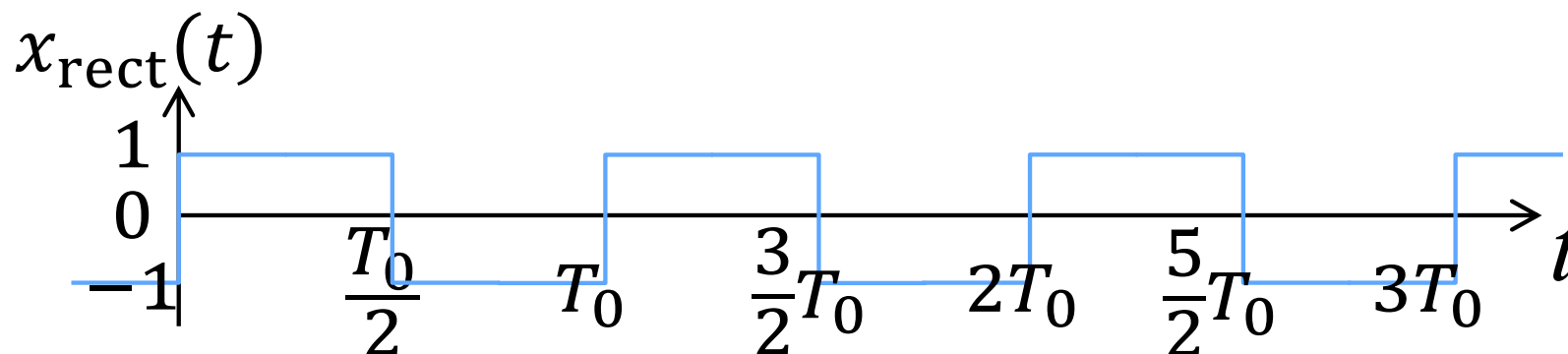
- ◆ 三角フーリエを指数におきかえると、フーリエ係数を求める式は

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j2\pi nft} dt \quad (2-11)$$

1周期分を積分して平均

- ◆ 周期信号 $x(t)$ のフーリエ係数 c_n を求め、フーリエ級数の形で表現することを、**フーリエ級数展開**という。

- ◆ 信号 $x_{\text{rect}}(t)$ は奇関数だから、 $a_n = 0$ 。



- ◆ 正弦係数 b_n について、 n が偶数 $2m$ のときと、 n が奇数 $2m + 1$ のときをそれぞれ計算してみると・・・ (次のページへつづく)

◆ n が偶数のとき、 $fT_0 = 1$ かつ、 2π の整数倍にて \sin は0になるので、係数は0になる。

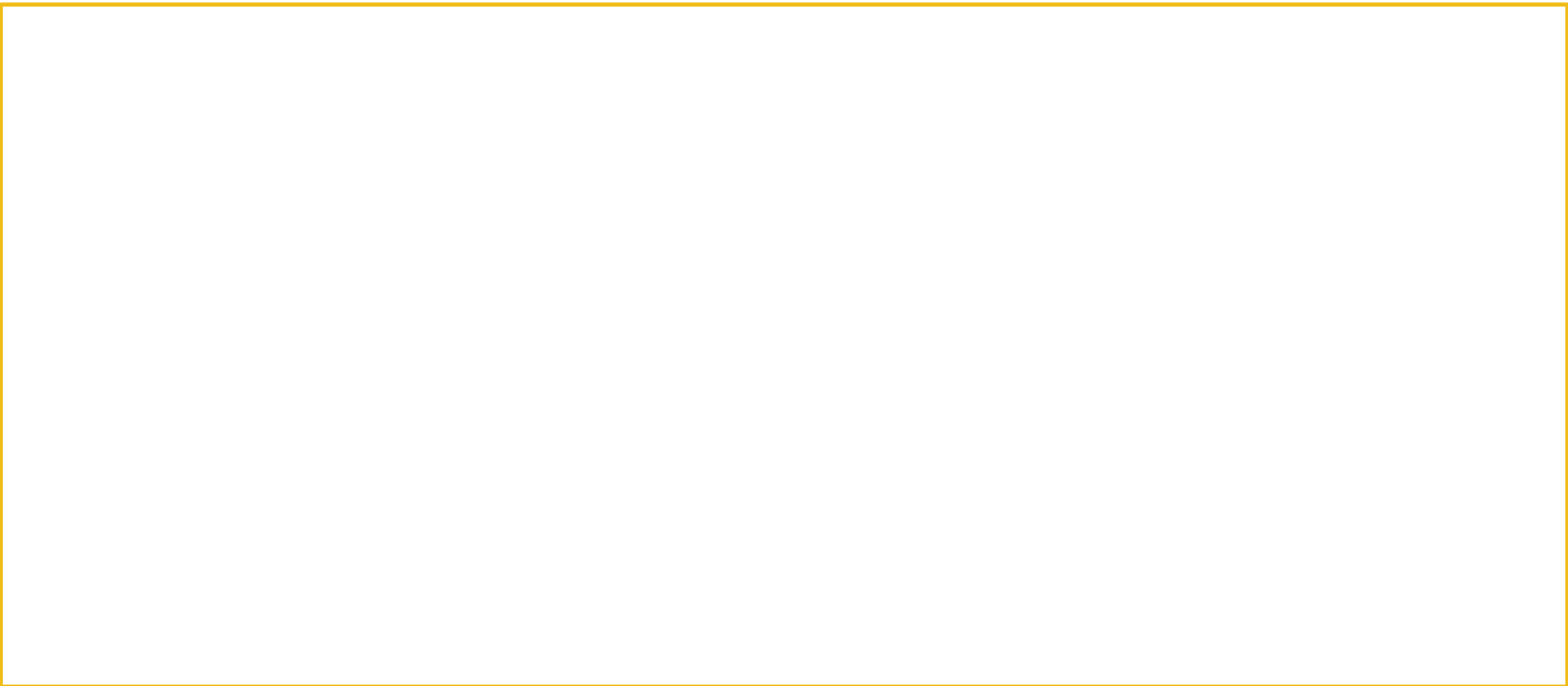
$$\begin{aligned} b_{2m} &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x_{\text{rect}}(t) \sin(4\pi m f t) dt \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} \sin(4\pi m f t) dt - \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} \sin(4\pi m f t) dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2-12)$$

◆ n が奇数のときの係数は.....

◆ n が奇数のときの係数は、

$$\begin{aligned}
 b_{2m+1} &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x_{\text{rect}}(t) \sin[2\pi(2m+1)ft] dt \\
 &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} \sin[2\pi(2m+1)ft] dt - \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} \sin[2\pi(2m+1)ft] dt \\
 &= \frac{2}{T_0} \left[\frac{-\cos[2\pi(2m+1)ft]}{2\pi(2m+1)f} \right]_0^{T_0/2} - \frac{2}{T_0} \left[\frac{-\cos[2\pi(2m+1)ft]}{2\pi(2m+1)f} \right]_{T_0/2}^{T_0} \\
 &= \frac{-2}{2\pi(2m+1)fT_0} [(-1-1) - (1+1)] = \frac{4}{\pi(2m+1)}
 \end{aligned}
 \tag{2-13}$$

- ◆ 式(2-3) に、 $a_n = 0$ および式(2-12), (2-13)を代入し、式を変形して、式(2-4)を導出しなさい。



$$\begin{aligned} &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin[2\pi(2m+1)ft] \\ &= \frac{4}{\pi} \sin(2\pi ft) + \frac{4}{3\pi} \sin(6\pi ft) + \frac{4}{5\pi} \sin(10\pi ft) + \dots \end{aligned}$$

f 成分 $3f$ 成分 $5f$ 成分 (2-4)

目次

1. 時間と周波数の変換
2. フーリエ級数
3. フーリエ級数展開
4. 信号空間

- ◆ 高等学校では、数学Ⅱで複素数を学習し、数学Cにおいてベクトルと複素数平面を学習する。
- ◆ 複素数は、「大きさ」と「向き」をもつので、ベクトルとして扱うことができる。
- ◆ 「向き」を考えず、**単なる数（スカラー）**としてみなすこともできる。

- ◆ 周期信号 $x(t)$, $y(t)$ を、スカラーとしての複素数 $a, b \in \mathbb{C}$ で線形結合した $z(t)$ は、周期 T の周期信号になる。

$$z(t) = ax(t) + by(t) \in S_T \quad (2-14)$$

- ◆ 線形結合によって、様々な周期信号が表され、その集合を**信号空間**という。

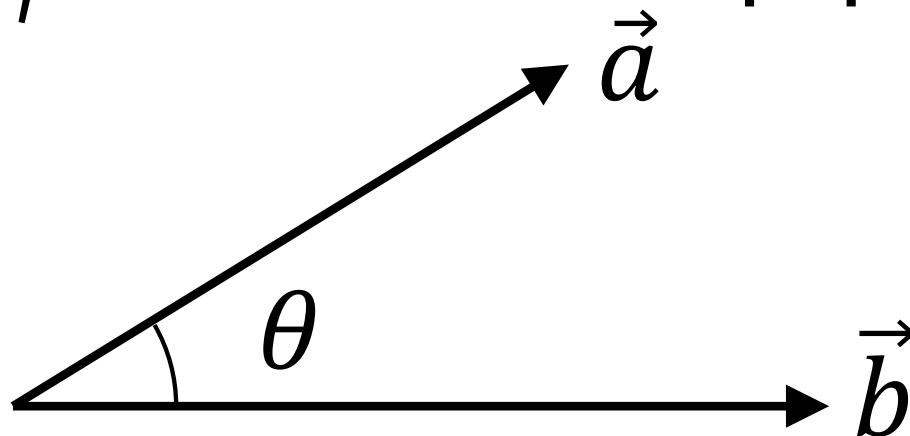
- ◆ 信号空間 S_T において、周期信号 $x(t)$, $y(t)$ の内積を、次の式で定義する。

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)y(t)^* dt \quad (2-15)$$

- ◆ 内積が0のとき、信号 $x(t)$, $y(t)$ は直交する。(次のページで復習)

- ◆ ベクトルの内積は次の式で表される。

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (2-16)$$



- ◆ 直交するとき($\theta = \pi/2$)は、内積はゼロになる。

- ◆ 周波数 $f = 1/T$ の周期信号として、2つの正弦波 $e^{j2\pi nft}$, $e^{j2\pi mft}$ を考えるとき、それらの内積は次の式になる。

$$\begin{aligned} \langle e^{j2\pi nft}, e^{j2\pi mft} \rangle &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j2\pi(n-m)ft} dt \\ &= \delta_{n-m} = \begin{cases} 1, & (n = m) \\ 0, & (n \neq m) \end{cases} \quad (2-17) \end{aligned}$$

- ◆ ここで、 δ_{n-m} はデルタ関数である。

- ◆ 同じ信号どうしの内積が1、つまり大きさが1である。
- ◆ 異なる信号どうしの内積が0、つまり異なる信号は直交している。
- ◆ 2つの正弦波 $e^{j2\pi nft}$, $e^{j2\pi mft}$ は、この信号空間の**正規化直交基底**である。
(線形空間の元になる信号である)

- ◆ (2-11)式を(2-15)式の内積の定義で書き直す。

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j2\pi nft} dt \\ &= \langle x(t), e^{j2\pi nft} \rangle \end{aligned} \quad (2-18)$$

- ◆ 基底 $e^{j2\pi nft}$ と異なる成分ならば0になり、基底と同じ成分の大きさが係数 c_n になる。
フーリエ係数は周波数成分の抽出である。

- ◆ 周期信号 $x(t), y(t)$ の n 次フーリエ係数を x_n, y_n とすると、内積はフーリエ係数で表せる。

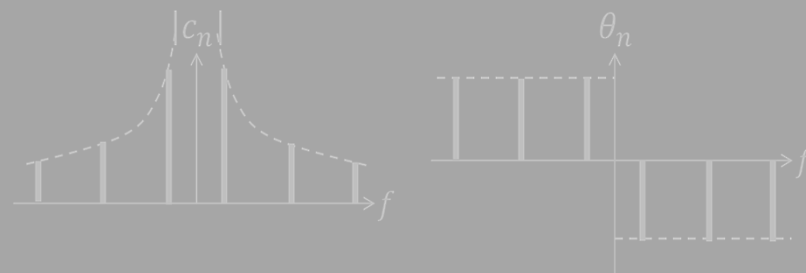
$$\langle x(t), y(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n y_n^* \quad (2-19)$$

- ◆ $x(t)$ 自身の内積は、 $x(t)$ の電力を表す。

$$P_x = \langle x(t), x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \quad (2-20)$$

フーリエ級数におけるパーセバルの定理

Thank you.



伝送システム理論

Transmission system theory

第3講 フーリエ変換

Lecture 3: Fourier transform



古川 靖

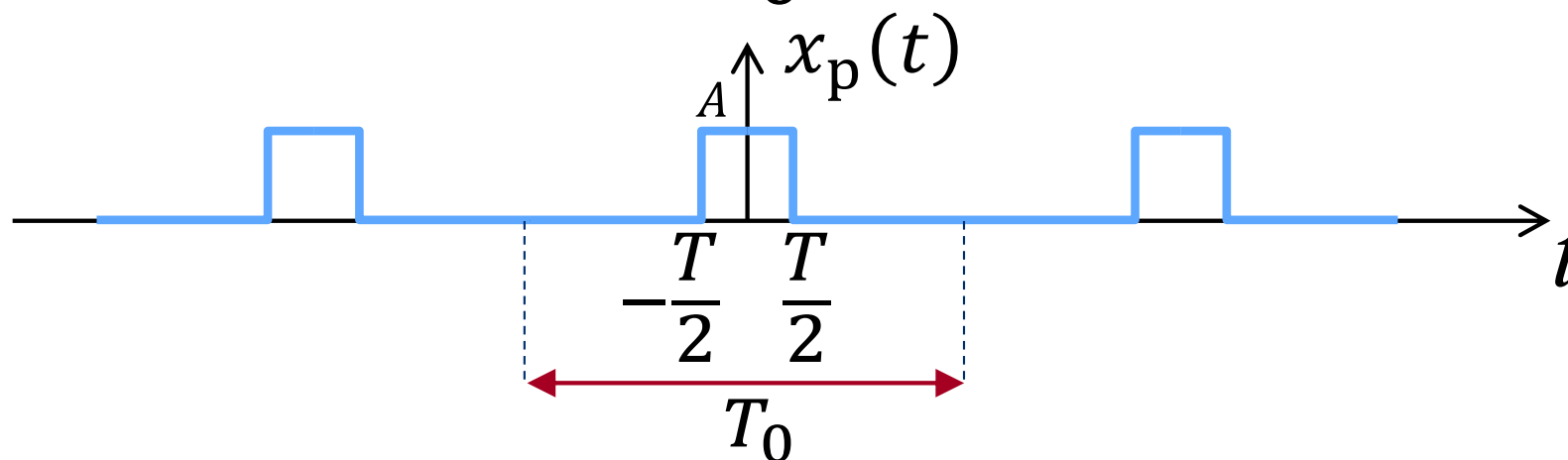
埼玉工業大学 工学部 情報システム学科

目次

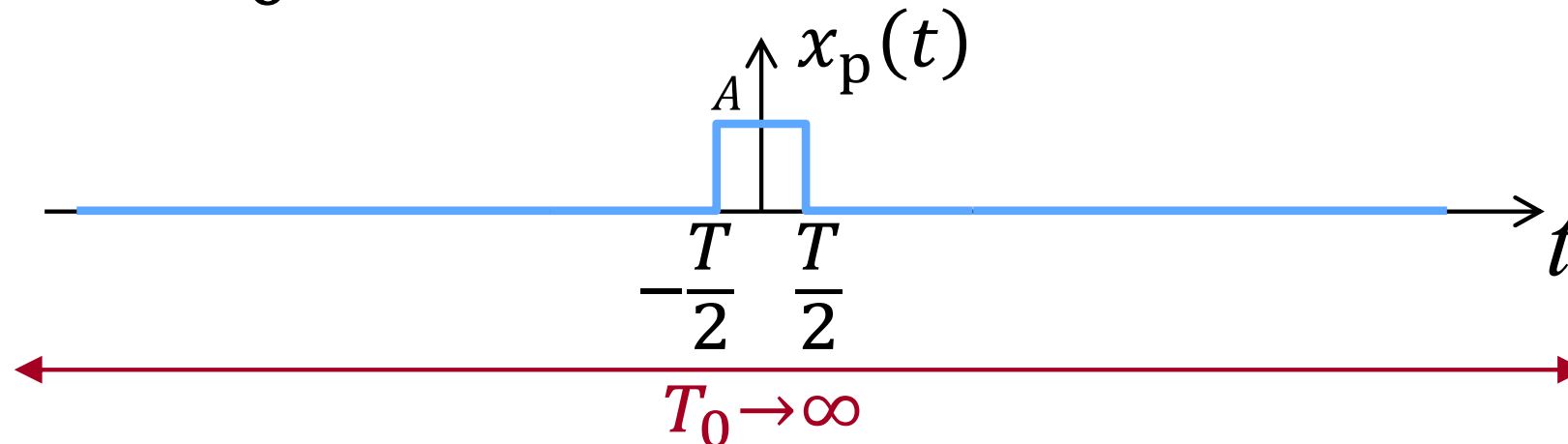
1. フーリエ変換
2. 代表的な信号のフーリエ変換
3. フーリエ変換の性質
4. 復習

- ◆ フーリエ級数展開は、「**周期**信号」を、「**離散的**」な周波数（ $1/T_0$ 間隔）の正弦波の和で表すことである。
- ◆ フーリエ変換は、「**非周期的**信号」を、「**連続**した」周波数成分で表すことである。
- ◆ フーリエ級数展開で $T_0 \rightarrow \infty$ にしたものが、フーリエ変換だと考えればよい。

◆ パルス幅 T 、周期 T_0 の周期信号



◆ 周期 $T_0 \rightarrow \infty$ にしたら非周期信号



- ◆ 前出のパルス信号列は次の式で表される。

$$x_p(t) = \begin{cases} A, & \left(-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \right) \\ 0, & \left(t < -\frac{T}{2}, t > \frac{T}{2} \right) \end{cases} \quad (3-1)$$

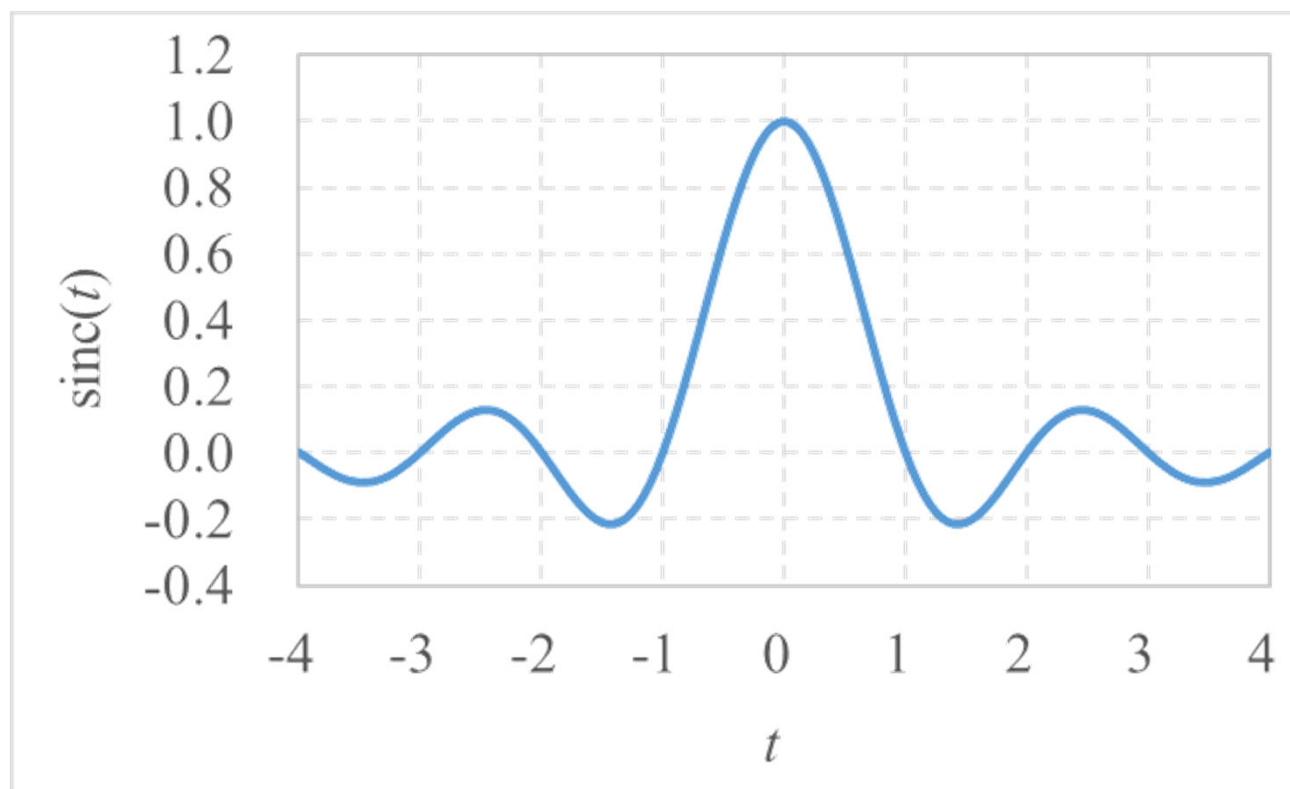
- ◆ (3-1)式を(2-11)式に代入すると、フーリエ係数を得ることができる。

◆フーリエ係数

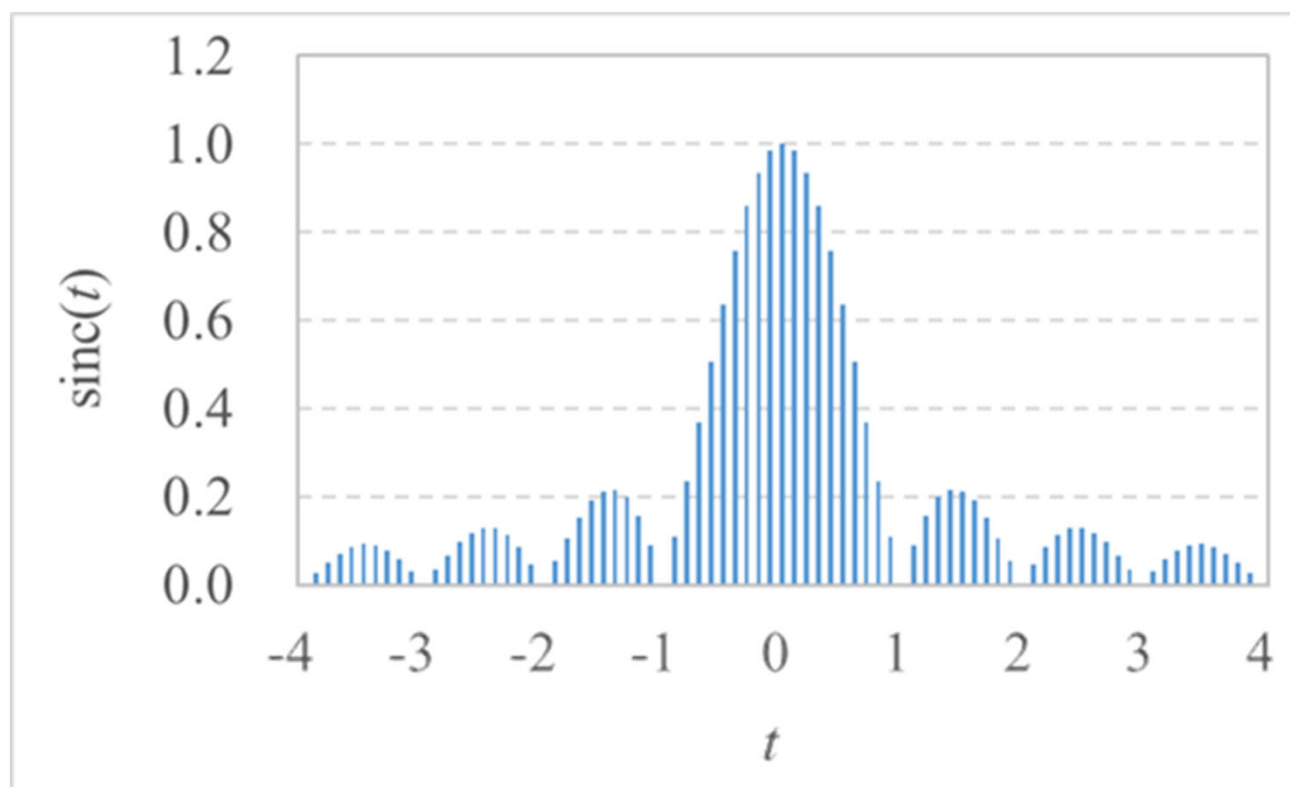
$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{A}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi nft} dt \\
 &= \frac{A}{T_0} \left[-\frac{e^{-j2\pi nft}}{j2\pi nf} \right]_{-T/2}^{T/2} \\
 &= \frac{AT}{T_0} \cdot \frac{\sin(\pi nT/T_0)}{\pi nT/T_0} = A \frac{T}{T_0} \operatorname{sinc} \left(n \frac{T}{T_0} \right) \quad (3-2)
 \end{aligned}$$

◆ sinc関数は次の式で表される。

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (3-3)$$



- ◆ 振幅スペクトルは、フーリエ係数の絶対値 $|c_n|$ だから、下図のようになる。離散的であることに注意。



◆ 周期信号のフーリエ係数

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi nft} dt \quad (3-4)$$

1周期分を積分して平均

n の部分が離散的表現

◆ 非周期信号のフーリエ変換

$$X(f) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0 c_n = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3-5)$$

時間軸すべてを積分

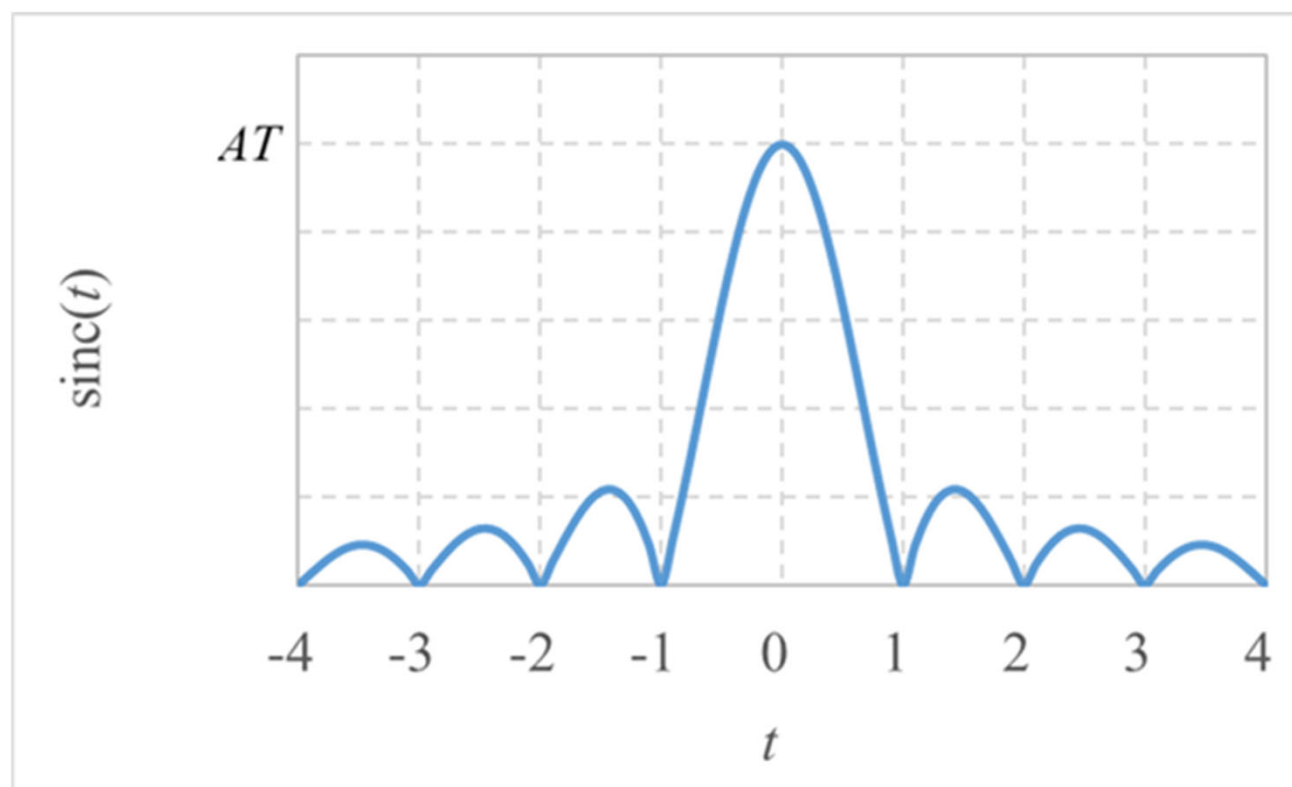
f の部分が連続するスペクトル表現

◆ 単一パルスのフーリエ変換

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0 c_n = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t} dt = A \left[-\frac{e^{-j2\pi f t}}{j2\pi f} \right]_{-T/2}^{T/2} \\
 &= AT \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = AT \operatorname{sinc}(Tf) \qquad (3-6)
 \end{aligned}$$

f の部分が連続するスペクトル表現

- ◆ フーリエ変換したスペクトルは、連続するスペクトルになる。



- ◆ 周波数スペクトルから時間波形へ戻す
逆フーリエ変換は次の式で定義される。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \mathcal{F}^{-1}[X(f)] \quad (3-7)$$

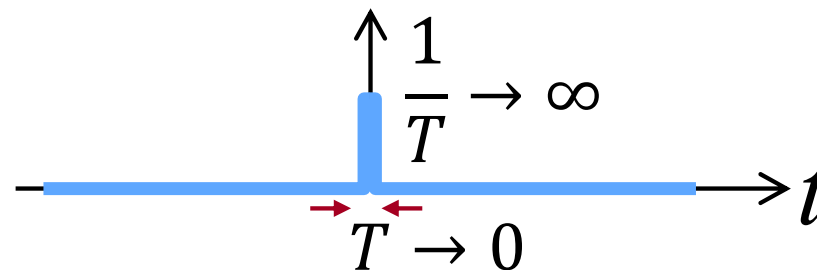
- ◆ フーリエ変換を用いると、時間領域の信号 $x(t)$ と周波数領域の信号 $X(f)$ を、相互に変換することができる。

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \quad (3-8)$$

目次

1. フーリエ変換
2. 代表的な信号のフーリエ変換
3. フーリエ変換の性質
4. 復習

- ◆ 単位インパルス信号とは、幅0で面積が1となるパルスであり、ディラックのデルタ関数として知られる。

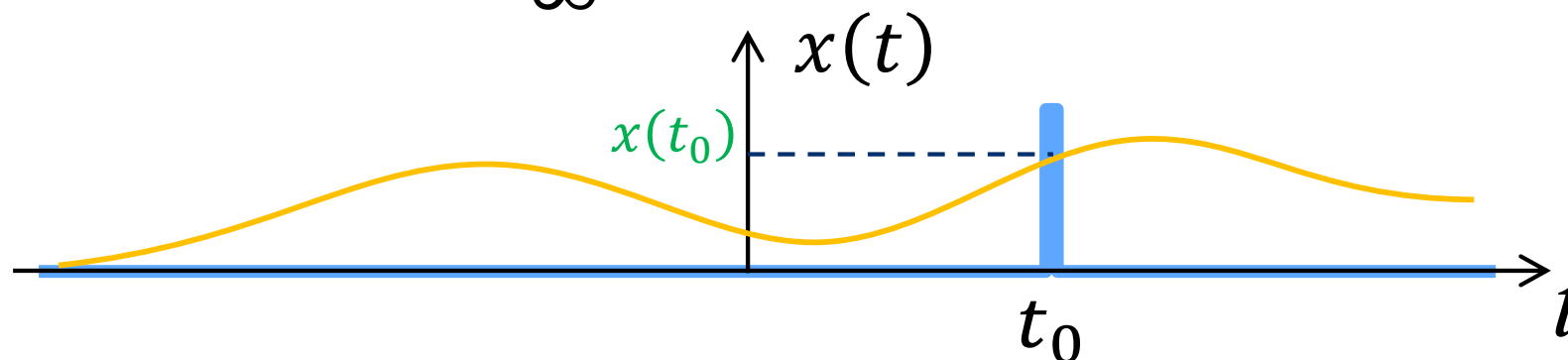


$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & (t = 0) \\ 0, & (t \neq 0) \end{cases} \quad (3-9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3-10)$$

- ◆ 連続信号 $x(t)$ の $t = t_0$ における値 $x(t_0)$ を得るには、単位インパルスを用いる。

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt \quad (3-11)$$



- ◆ 信号から特定時刻の値を抜き取ることを、サンプリング（標本化）という。

- ◆ 単位インパルス信号のフーリエ変換および逆フーリエ変換は次のようになる。

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1 \quad (3-12a)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} dt = 1 \quad (3-12b)$$

周波数軸の $\delta(f)$ は、時間軸の 1 と対である。

◆ 振幅 A 、基本周波数 f_0 の \cos 波のフーリエ変換は次のようになる。

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi f t} dt$$

(2-6) 参照

$$= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-j2\pi(f-f_0)t} + e^{-j2\pi(f+f_0)t}] dt$$

次のページへつづく

前ページのつづき

$$= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-j2\pi(f-f_0)t} + e^{-j2\pi(f+f_0)t} \right] dt$$

(2-17) , (3-12b) 参照

$$= \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad (3-13)$$

◆ 振幅 A 、基本周波数 f_0 のsin波の場合は、

$$X(f) = \frac{A}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \quad (3-14)$$

No.	$x(t)$	$X(f)$
1	$\delta(t)$	1
2	1	$\delta(f)$
3	$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
4	$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{A}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$

No.	$x(t)$	$X(f)$
5	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
6	$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
7	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_0)$	$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{T_0}\right)$

目次

1. フーリエ変換
2. 代表的な信号のフーリエ変換
3. フーリエ変換の性質
4. 復習

- ◆ フーリエ変換対 $x(t) \leftrightarrow X(f)$ に対して、 t_0 の時間シフトを行うと、振幅は変わらずに位相がシフトする。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j2\pi f (t' + t_0)} dt \\ &= X(f) e^{-j2\pi f t_0}\end{aligned}\tag{3-15}$$

- ◆ フーリエ変換対 $x(t) \leftrightarrow X(f)$ に対して、 f_0 の周波数シフトを行うと、時間波形に周波数 f_0 の波形が乗算される。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[X(f - f_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f_0) e^{j2\pi f t} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f') e^{-j2\pi(f' + f_0)t} df' \\ &= x(t) e^{j2\pi f_0 t}\end{aligned}\tag{3-16}$$

- ◆ フーリエ変換対を $x(t) \leftrightarrow X(f)$ とすると、
時間微分は次の式で表される。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[\frac{d}{dt} e^{j2\pi ft} \right] df \\ &= j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df = j2\pi f X(f)\end{aligned}\tag{3-17}$$

- ◆ フーリエ変換対を $x(t) \leftrightarrow X(f)$ とすると、
周波数微分は次の式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{d}{df} X(f) &= \frac{d}{df} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{d}{df} e^{-j2\pi ft} \right] df \\ &= -j2\pi t \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} df = -j2\pi t x(t) \end{aligned} \quad (3-18)$$

◆畳み込み積分は次の式で表される。

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \quad (3-19)$$

◆フーリエ変換対を $x(t) \leftrightarrow X(f)$ 、 $y(t) \leftrightarrow Y(f)$ とすると、 $z(t)$ のフーリエ変換は、

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (3-20)$$

次のページへつづく

前ページのつづき

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)e^{-j2\pi ft} d\tau dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau)e^{-j2\pi f(t-\tau)} d(t - \tau) \\
 &= X(f)Y(f) \tag{3-18}
 \end{aligned}$$

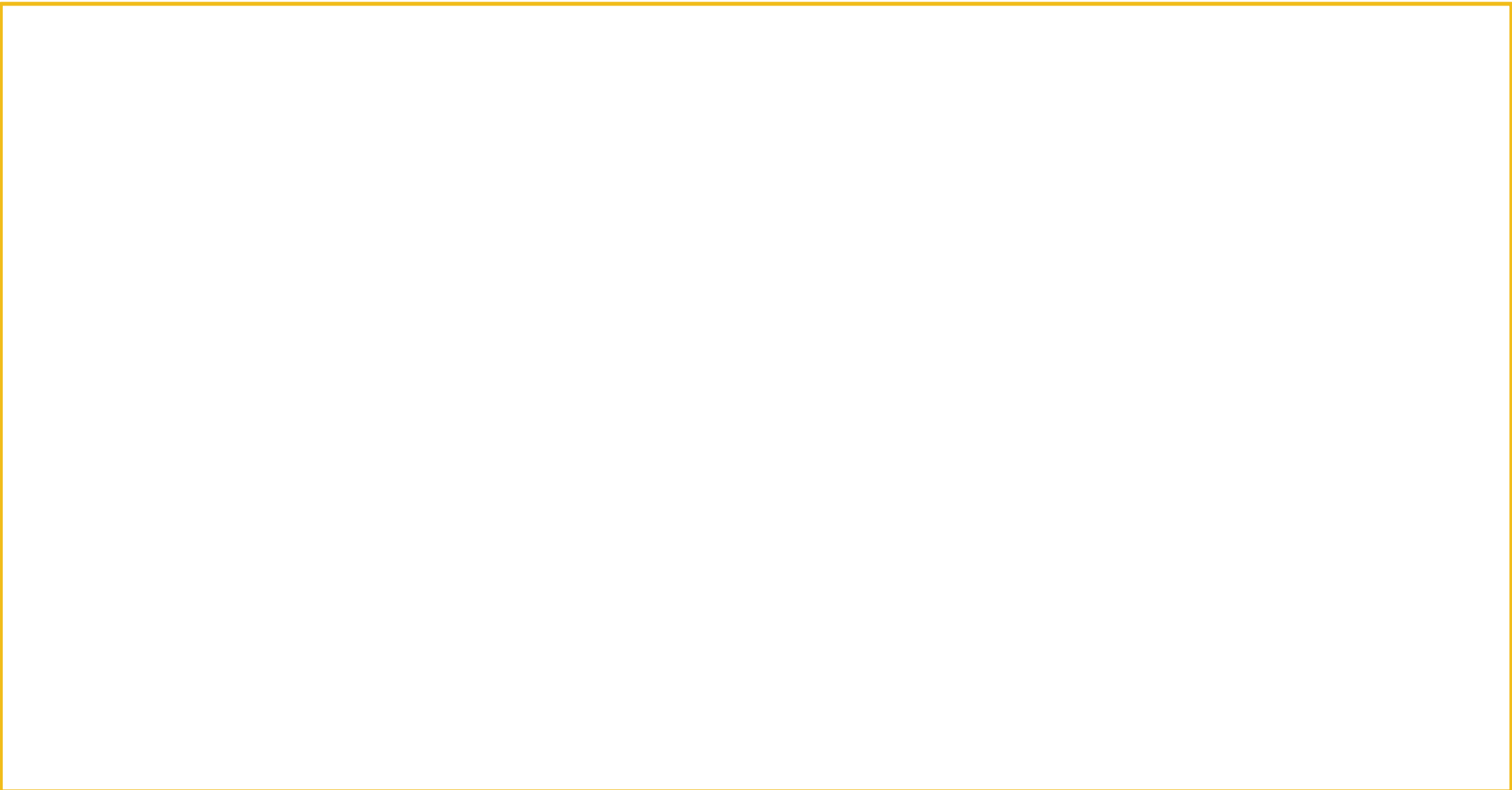
時間軸の畳み込み積分は、2つの信号の周波数成分の積である。

- ◆ $x(t) \leftrightarrow X(f)$ のとき、実数 $a \neq 0$ に対して、次の式が成り立つことを示せ。

$$x(at) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (3-19)$$

次のページへつづく

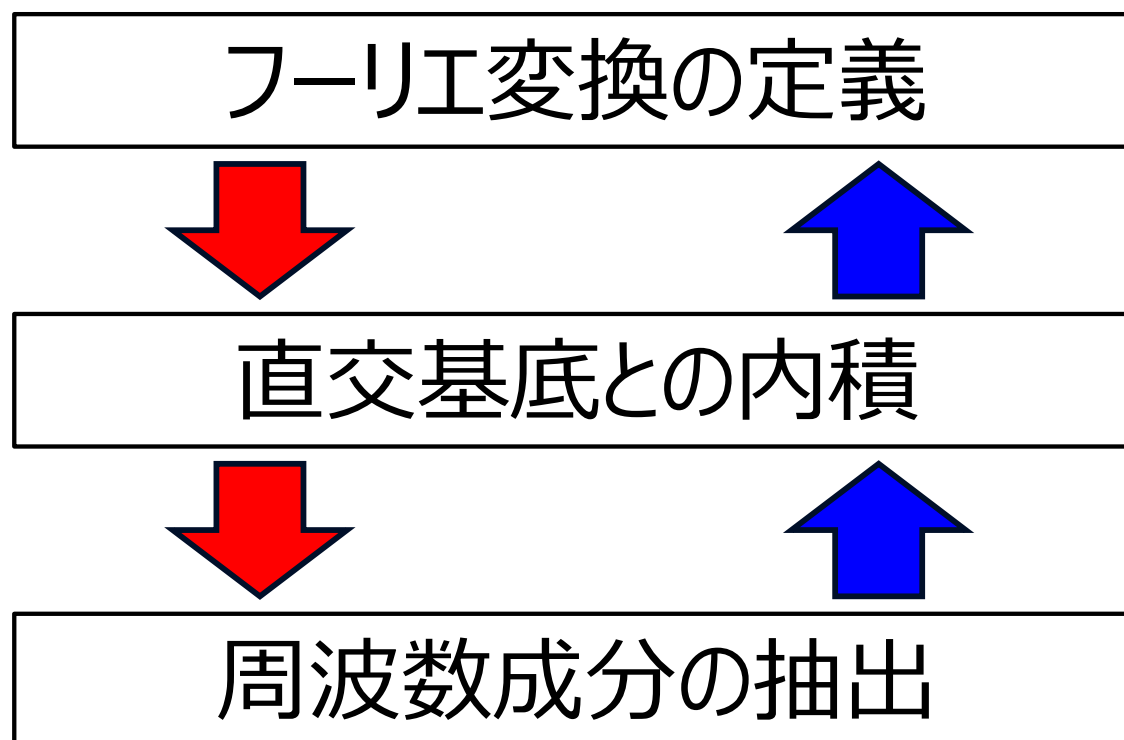
前ページのつづき



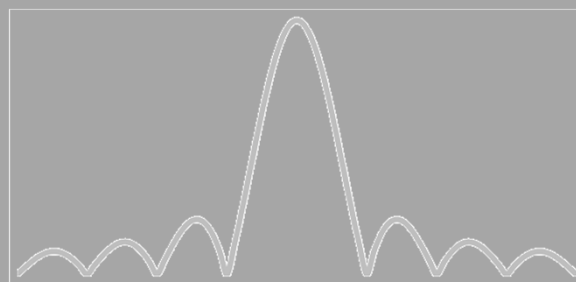
目次

1. フーリエ変換
2. 代表的な信号のフーリエ変換
3. フーリエ変換の性質
4. 復習

- ◆ 講義ではフーリエ変換の定義の意味を説明せずに上から順に教えた。時間波形から周波数成分を抽出する目的で、下から順に考えれば定義の意味がわかる。



Thank you.



伝送システム理論

Transmission system theory

第4講 スペクトルと信号処理

Lecture 4: Spectrum and signal processing



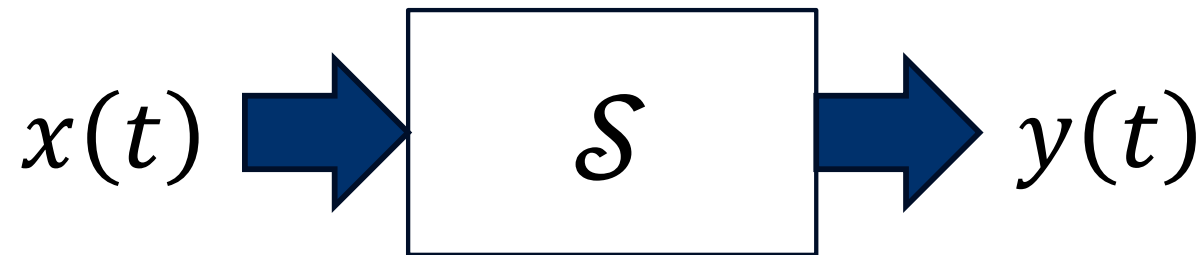
古川 靖

埼玉工業大学 工学部 情報システム学科

目次

1. 線形システム
2. 線形システムのフィルタ特性
3. 電力スペクトル密度
4. 短時間フーリエ変換

- ◆ 信号 $x(t)$ を入力すると、信号 $y(t)$ が出力されるシステム \mathcal{S} について考える。



$$y(t) = \mathcal{S}[x(t)] \quad (4-1)$$

システム \mathcal{S} は、入力によって出力が決まる関数のようなものと考えればよい。

- ◆ システムに加法性、^{せいじ}齊次性がある場合、
システムは線形(Linear)である。

加法性

$$\mathcal{S}[x_1(t) + x_2(t)] = \mathcal{S}[x_1(t)] + \mathcal{S}[x_2(t)] \quad (4-2)$$

齊次性

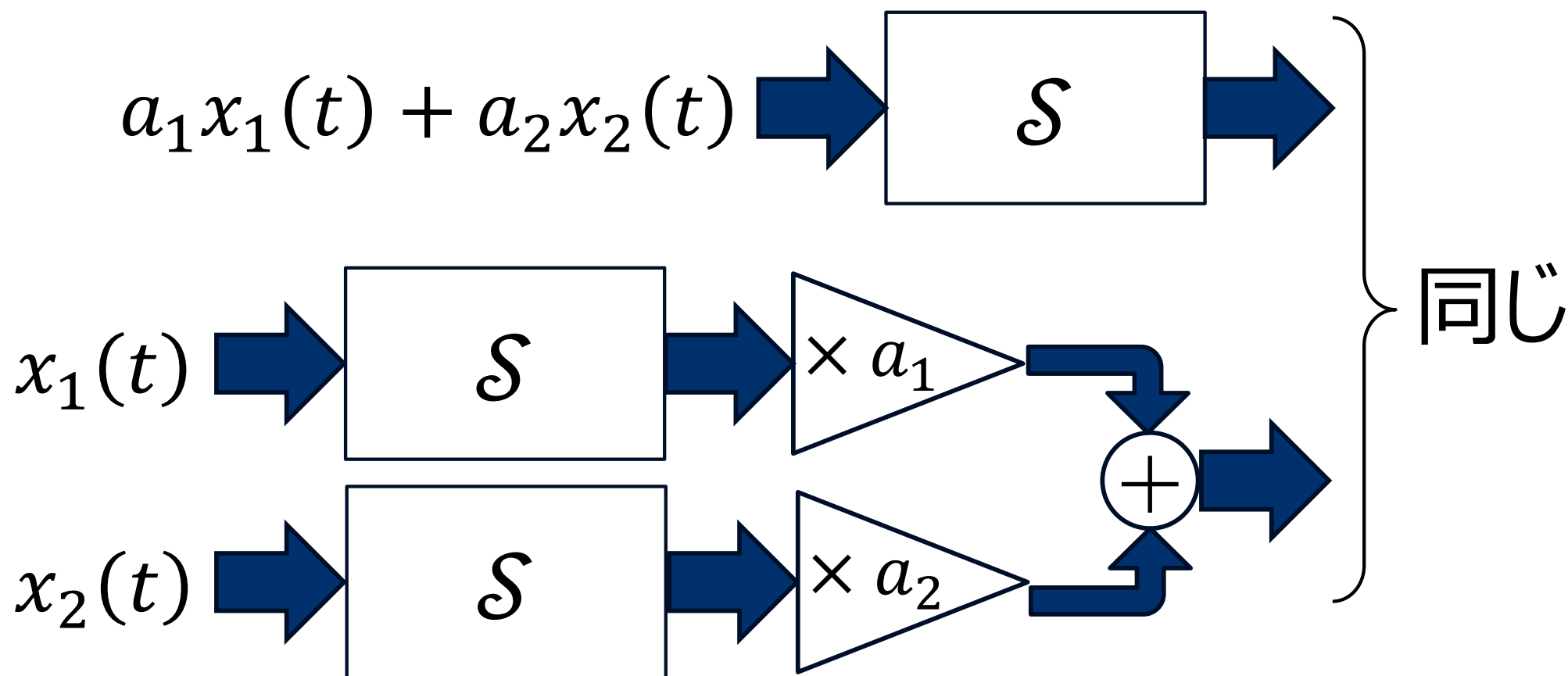
$$\mathcal{S}[a_1 x_1(t)] = a_1 \mathcal{S}[x_1(t)] \quad (4-3)$$

線形性

$$\mathcal{S}[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 \mathcal{S}[x_1(t)] + a_2 \mathcal{S}[x_2(t)] \quad (4-4)$$

線形結合された入力

◆ (4-4)式のように、線形結合された入力を与える場合は、下図のように表せる。



- ◆ 任意の実数 τ を用いて入力的时间軸をずらすと、出力の時間軸もずれる。これを、システム \mathcal{S} が時不変(Time invariant)であるという。

時不変

$$y(t - \tau) = \mathcal{S}[x(t - \tau)] \quad (4-5)$$

- ◆ 線形かつ時不変のシステムを、**線形時不変システム**という。

- ◆ フーリエ変換対 $x(t) \leftrightarrow X(f)$ について、システム \mathcal{S} を適用すると、

$$y(t) = \mathcal{S}[x(t)] = \mathcal{S}\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\mathcal{S}\left[e^{j2\pi ft}\right] df \quad (4-6)$$

逆フーリエ変換

- ◆ 指数正弦波 $e^{j2\pi ft}$ に対するシステムの応答 $\mathcal{S}\left[e^{j2\pi ft}\right]$ がわかれば、信号 $x(t)$ の応答もわかる。

- ◆ (3-11)式、(3-17)式より、デルタ関数 $\delta(t)$ を畳み込むことは、信号 $x(t)$ をサンプリングするのと同じだから、信号を変化させない。

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (4-7)$$

- ◆ よって、システム \mathcal{S} の応答は、

$$y(t) = \mathcal{S}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{S}[\delta(t - \tau)] d\tau \quad (4-8)$$

- ◆ 単位インパルス信号 $\delta(t)$ に対するシステム \mathcal{S} の応答 $h(t)$ を、インパルス応答 (impulse response) という。

$$h(t) = \mathcal{S}[\delta(t - \tau)] \quad (4-9)$$

- ◆ 信号 $x(t)$ に対するシステム \mathcal{S} の応答 $y(t)$ は、 $x(t)$ と $h(t)$ の畳み込み積分になる。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) \quad (4-10)$$

- ◆ 信号 $y(t)$, $x(t)$, $h(t)$ のフーリエ変換を、
 $Y(f)$, $X(f)$, $H(f)$ とすると、

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (4-11)$$

- ◆ (4-10)式より、

$$Y(f) = H(f) X(f) \quad (4-12)$$

- ◆ 周波数スペクトル $H(f)$ を、システム S の
伝達関数 (transfer function) という。

◆ (4-10)式より、

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) e^{-j2\pi f t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) [H(f) e^{-j2\pi f \tau}] d\tau \\ &= H(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = H(f) X(f) \end{aligned} \quad (4-13)$$

- ◆ (4-13)式を逆フーリエ変換して、(4-6)式と比較すると、

逆フーリエ変換

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f)X(f)e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)[H(f)e^{j2\pi ft}]df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)s[e^{j2\pi ft}]df \end{aligned} \quad (4-14)$$

- ◆ システム s の応答は次の式で表される。

$$s[e^{j2\pi ft}] = \underbrace{H(f)}_{\text{振幅}} \underbrace{e^{j2\pi ft}}_{\text{位相}} \quad (4-15)$$

- ◆ ある事象が原因となつて、別の事象を結果として発生させることを、因果的という。
- ◆ 単位インパルス信号 $\delta(t)$ を時刻 $t = 0$ に入力した結果、インパルス応答 $h(t)$ が生じるのだから、 $t < 0$ において $h(t) = 0$ である。このとき、システム S が因果的であるという。
- ◆ 畳み込み積分も $t \geq 0$ の有限時間で表す。

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (4-16)$$

目次

1. 線形システム
2. 線形システムのフィルタ特性
3. 電力スペクトル密度
4. 短時間フーリエ変換

- ◆ 信号から特定の周波数成分を抽出する線形システムを、フィルタ(filter)という。
- ◆ 信号にひずみを生じることなく、時間 t_0 だけ遅延させるフィルタ \mathcal{S} を考える。

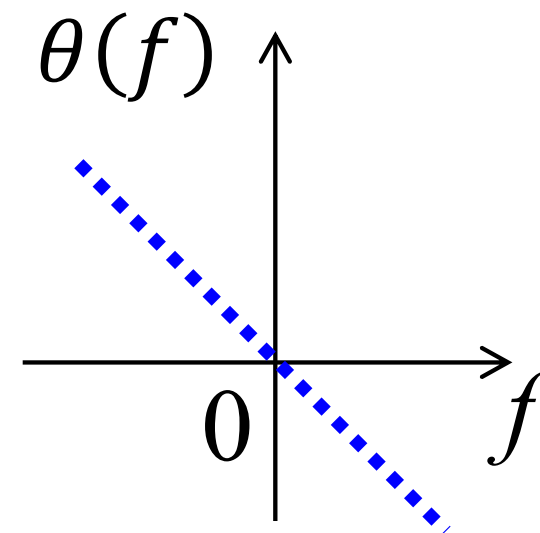
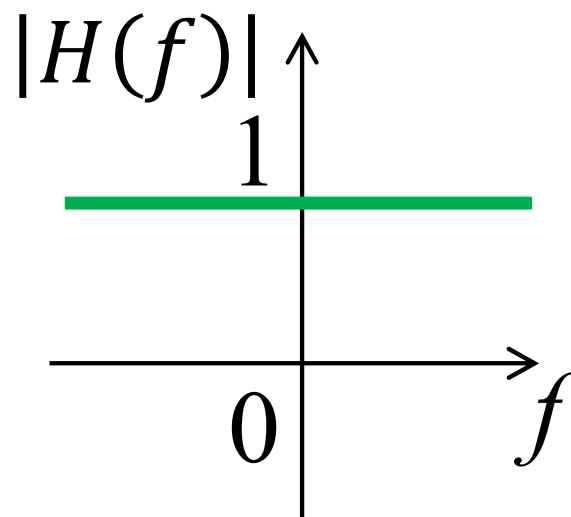
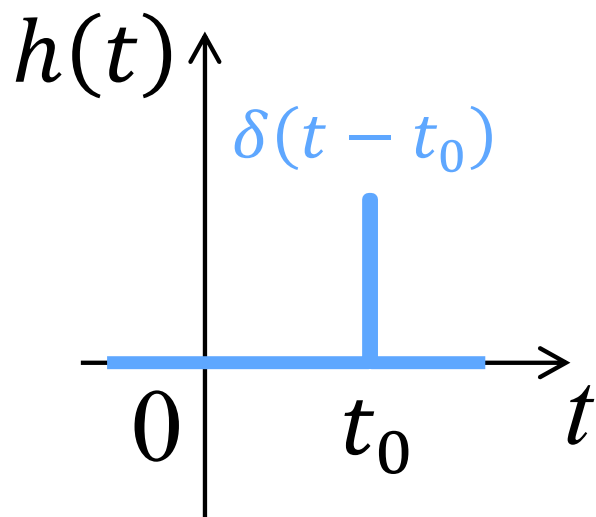
$$y(t) = x(t - t_0) = \mathcal{S}[x(t)] \quad (4-17)$$

- ◆ インパルス応答と伝達関数は次の式となる。

$$h(t) = \delta(t - t_0) \quad (4-18)$$

$$H(f) = \frac{\mathcal{F}[x(t - t_0)]}{\mathcal{F}[x(t)]} = \frac{X(f)e^{-j2\pi f t_0}}{X(f)} = e^{-j2\pi f t_0} \quad (4-19)$$

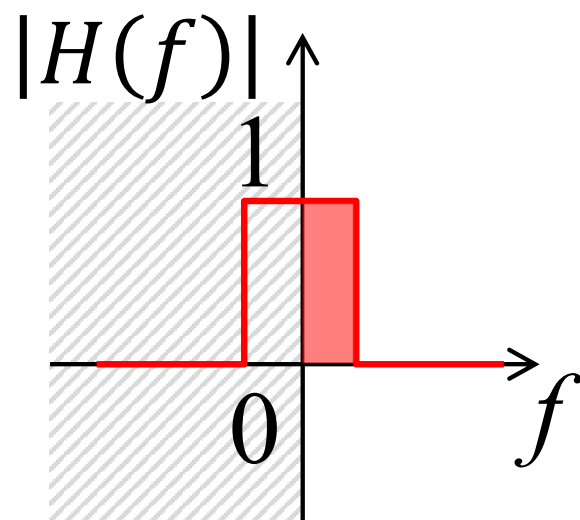
◆ (4-18)式, (4-19)式より、



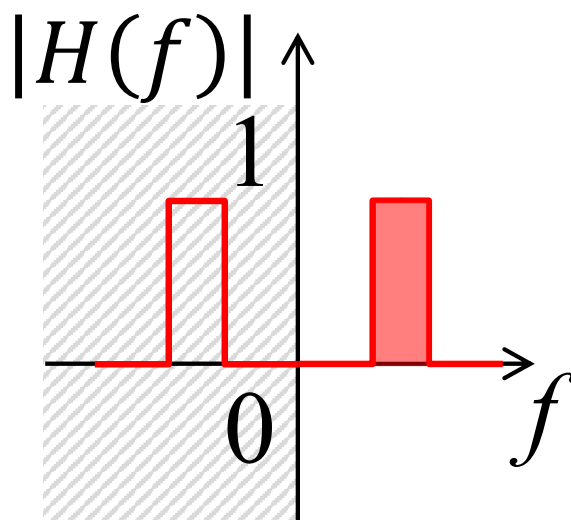
$$|e^{-j2\pi f t_0}| = 1 \quad \theta(f) = -j2\pi f t_0$$

- ◆ 伝達関数の位相が直線になっていることを、**線形位相**(linear phase)という。
- ◆ **理想フィルタ**の出力信号はひずまない。

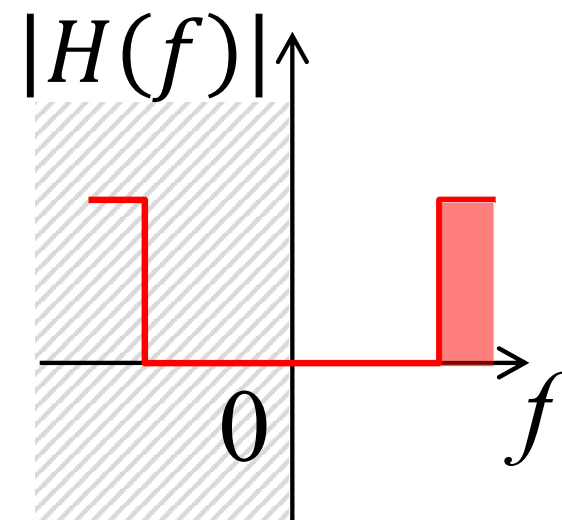
◆ 特定の周波数成分を通過させるフィルタ例。



低域通過フィルタ
(**L**ow **P**ass **F**ilter)



帯域通過フィルタ
(**B**and **P**ass **F**ilter)



高域通過フィルタ
(**H**igh **P**ass **F**ilter)

◆ 振幅1、線形位相の理想フィルタとなるLPFのインパルス応答はsinc関数である。第3講参照。

目次

1. 線形システム
2. 線形システムのフィルタ特性
3. 電力スペクトル密度
4. 短時間フーリエ変換

- ◆ 複素信号 $x(t)$ のエネルギー信号 $E_x < \infty$ は、次の式で表される。

$$\begin{aligned}
 E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) [x(t)]^* dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \right]^* \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) df \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) X(f) df \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df
 \end{aligned}
 \tag{4-20}$$

逆フーリエ変換

フーリエ変換

エネルギー信号におけるパーセバルの定理

- ◆ (4-20)式は、周波数 f 全体にわたる積分であり、

$$\Psi_x(f) = |X(f)|^2 \quad (4-21)$$

が単位周波数あたりのエネルギーを表している。

$\Psi_x(f)$ を、**エネルギースペクトル密度** (J/Hz) という。

- ◆ あらためて、エネルギー信号 $x(t)$ は有限である。

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(f) df < \infty \quad (4-22)$$

- ◆ 信号 $x(t)$ のエネルギーが無限大で、その平均電力 P_x が有限な信号を、電力信号という。例えば、正弦波が該当する。

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (4-23)$$

- ◆ $t > |T/2|$ において $x(t) = 0$ 。 $t \leq |T/2|$ において $x(t) \neq 0$ かつフーリエ変換対が $x(t) \leftrightarrow X(f)$ であるとすると、

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(f)|^2}{T} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df \end{aligned} \quad (4-24)$$

- ◆ここで、単位周波数あたりの平均電力 $G_x(f)$ を **電力スペクトル密度** (power spectral density) (W/Hz) という。

◆ 電力信号を逆フーリエ変換すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{|X(f)|^2}{T} \right] &= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{X(f)X^*(f)}{T} \right] \\ &= \frac{1}{T} x(t)x^*(-t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt\end{aligned}\quad (4-25)$$

◆ 信号 $x(t)$ と、それを τ だけ時間シフトした信号の一致度をみている。内積のときと同様の考え方。次ページの**自己相関関数** $R_x(\tau)$ で表される。

◆ 自己相関関数

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt \quad (4-26)$$

◆ 自己相関関数と電力スペクトル密度は、フーリエ変換対である。**ウィナー・ヒンチンの定理**という。

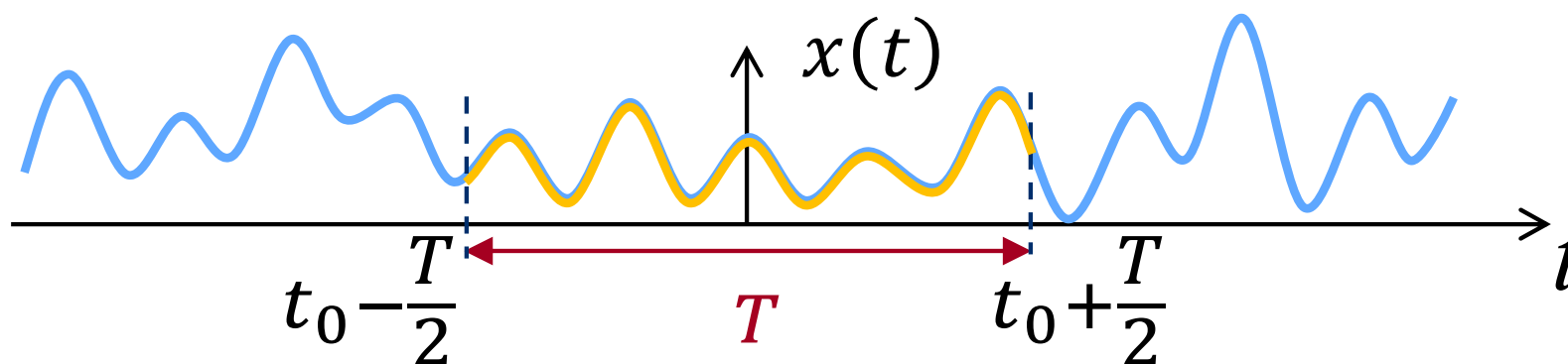
$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)e^{j2\pi f\tau} df \quad (4-27a)$$

$$G_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (4-27b)$$

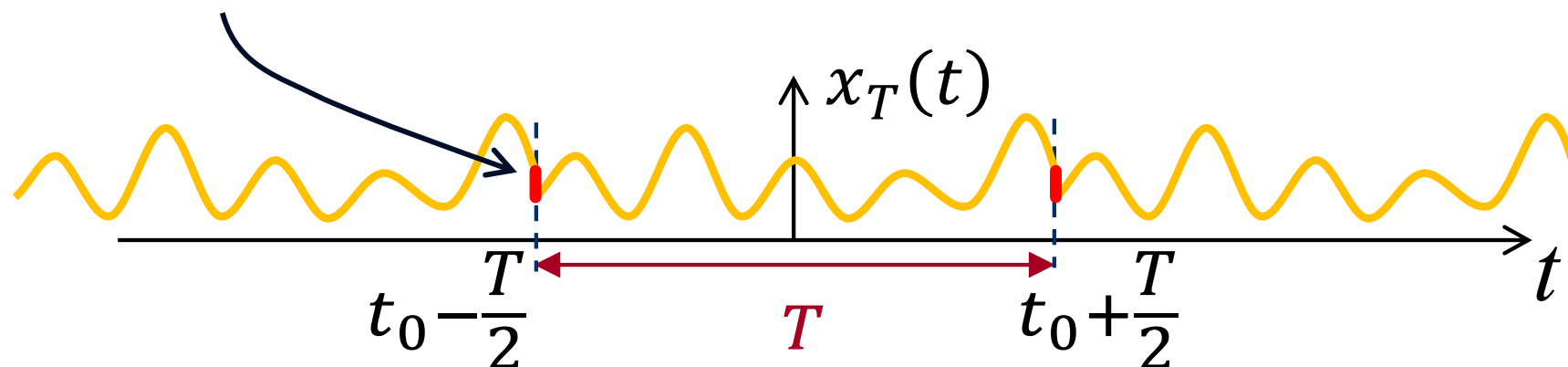
目次

1. 線形システム
2. 線形システムのフィルタ特性
3. 電力スペクトル密度
4. 短時間フーリエ変換

- ◆ フーリエ変換の定義(3-5)式からわかるように、時間軸で無限区間の積分をする必要がある。
- ◆ 実際そんなことはやれないので、有限の区間についてフーリエ変換を行い、スペクトルを得たい。
- ◆ 下図の信号 $x(t)$ から時間幅 T の有限区間を抽出する。

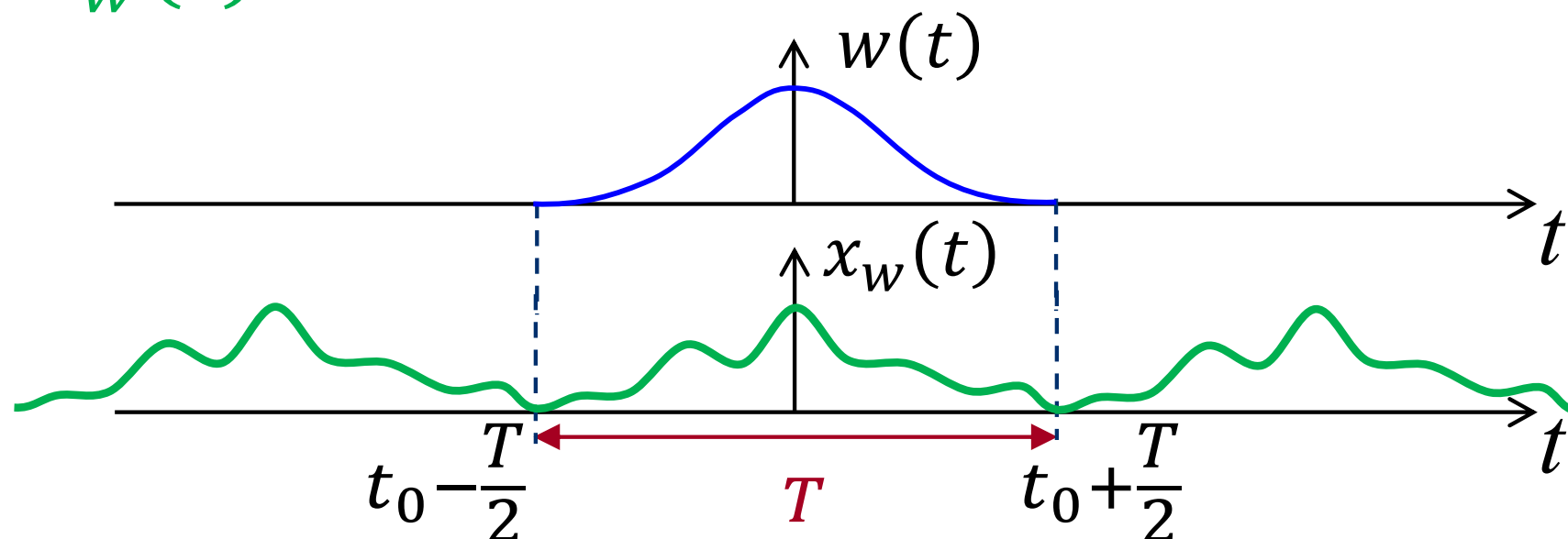


- ◆ 抽出した区間が繰り返す信号 $x_T(t)$ の両端は不連続になりうる。



- ◆ 不連続波形は元の信号 $x(t)$ にはないので、 $x_T(t)$ をフーリエ変換しても、正しいスペクトルを得ることができない。

- ◆ 不連続をなくすために、中心にピークをもち両端が0に漸近する形状の窓関数(window function) $w(t)$ を周期信号に乗算して、連続な信号 $x_w(t)$ を得る。
- ◆ $x_w(t)$ から元の信号に近いスペクトルが得られる。



- ◆ フーリエ変換は実用上、窓関数を用いて有限区間から周波数スペクトルを解析する。
- ◆ 比較的短い時間区間からフーリエ変換を行うものを、**短時間フーリエ変換**(short-term Fourier transform; **SFFT**)という。SFFTは次の式で表される。

$$X(t, nf) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau) w(\tau - t) e^{-j2\pi f t} d\tau \quad (4-28)$$



名前	$w(t)$	波形	特徴
矩形窓 方形窓	1		両端は0に漸近せず 不連続
ガウス窓	$\exp\left[-\frac{(t - 0.5)^2}{\sigma^2}\right]$		通過域と阻止域に リップルが生じる
ハン窓	$0.50 - 0.50 \cos(2\pi t)$		最もよく使われる。 ハニング窓ともいう。
ハミング窓	$0.54 - 0.46 \cos(2\pi t)$		ハン窓より 周波数分解能が良い。
ブラックマン窓	$0.42 - 0.50 \cos(2\pi t) + 0.08 \cos(4\pi t)$		周波数分解能が 悪いが D/Rが広い。
カイザー窓	$\frac{I_0\left[\pi\alpha\sqrt{1 - (2t - 1)^2}\right]}{I_0(\pi\alpha)}$		パラメータ α で 特性を変更可能。

- ◆ 前ページTable 4-1の式を用い、区間 $[0, 1]$ におけるハミング窓の両端において、信号が不連続を生じうることを示せ。



Thank you.



伝送システム理論

Transmission system theory

第5講 確率過程と雑音

Lecture 5: Stochastic processes and noises



古川 靖

埼玉工業大学 工学部 情報システム学科

目次

1. 確率変数・分布関数・確率密度関数
2. 多変量分布
3. 確率過程
4. 白色雑音
5. 帯域通過雑音

◆ 確率とは、ある**事象**(出来事)が起こる可能性を、 $0 \sim 1$ ($0\% \sim 100\%$)の数値で表したものの。

(例1) 明日、埼玉県の降水**確率**は**30%**です。

(例2) サイコロを振って偶数が出る**確率**は**50%**。

◆ すべての事象の集合を、**標本空間**という。

(例1) 雨が降る・降らないの両事象の集合

(例2) 偶数と奇数の両事象の集合

- ◆ 標本空間 $\mathcal{X} = \{a_1, a_2, \dots\}$ に含まれる各事象を数値で表す変数 X を、**確率変数** という。
- ◆ X は、離散値、連続値のいずれでもよい。
- ◆ 事象 a_1 の確率変数は $X(a_1)$ とする。
(例) 雨が降らない事象 a_1 を $X(a_1) = 0$ で表し、雨が降る事象 a_2 を $X(a_2) = 1$ で表すと、雨が降ったりやんだりの事象は、 $0 \sim 1$ の間。

- ◆ 確率変数 X がある値 x 以下である確率を、**分布関数**(distributed function)、または累積分布関数といい、次式で定義される。

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (5-1)$$

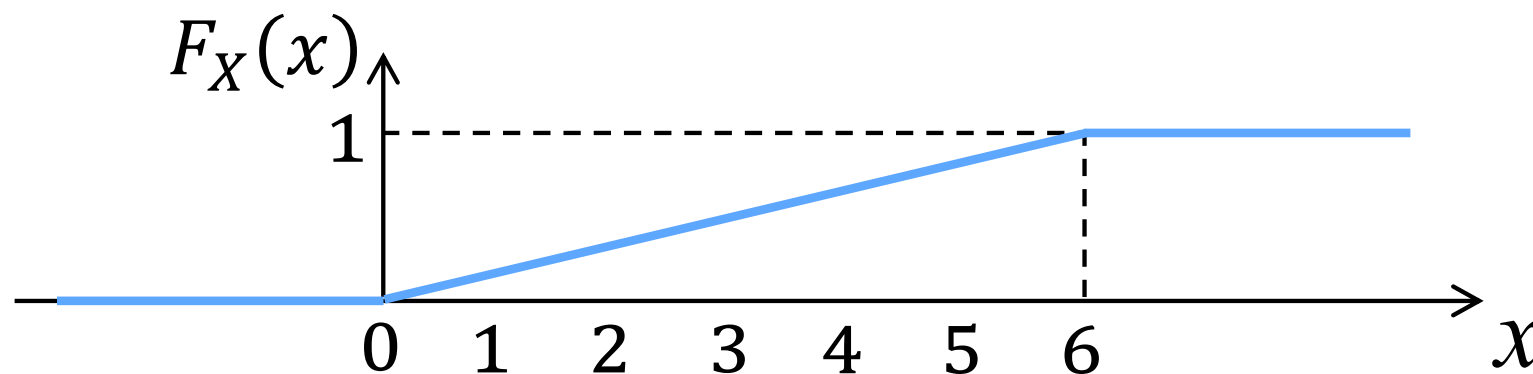
- ◆ X は実数 ($-\infty < X < \infty$) であるため、分布関数には次の性質がある。

$$F_X(-\infty) = 0 \quad (5-2)$$

$$F_X(\infty) = 1 \quad (5-3)$$

◆サイコロの目を確率変数とするとき、事象は6つあり、分布関数は以下のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} F_X(1) &= P(X \leq 1) = \frac{1}{6} \\ &\vdots \\ F_X(6) &= P(X \leq 6) = \frac{6}{6} \end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$



注. サイコロの目は離散的だが、ここでは連続的に表現した。

- ◆ 分布関数を微分した関数 $f(x)$ を **確率密度関数** (probability density function) といい、次式で表される。

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \quad (5-5)$$

- ◆ 確率密度関数を積分すると分布関数になる。

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \quad (5-6)$$

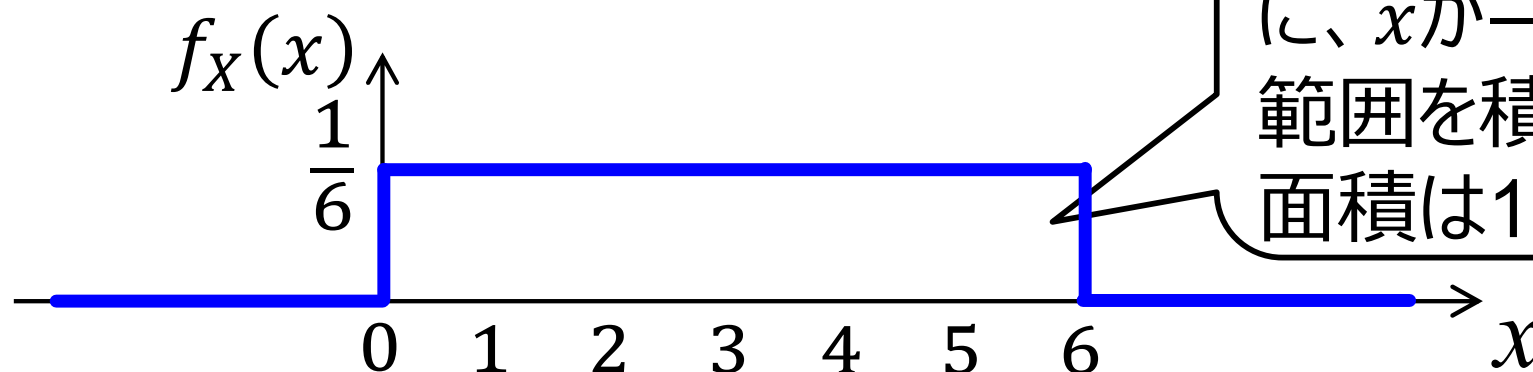
◆ 確率密度関数には次の性質がある。

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx \quad (5-7)$$

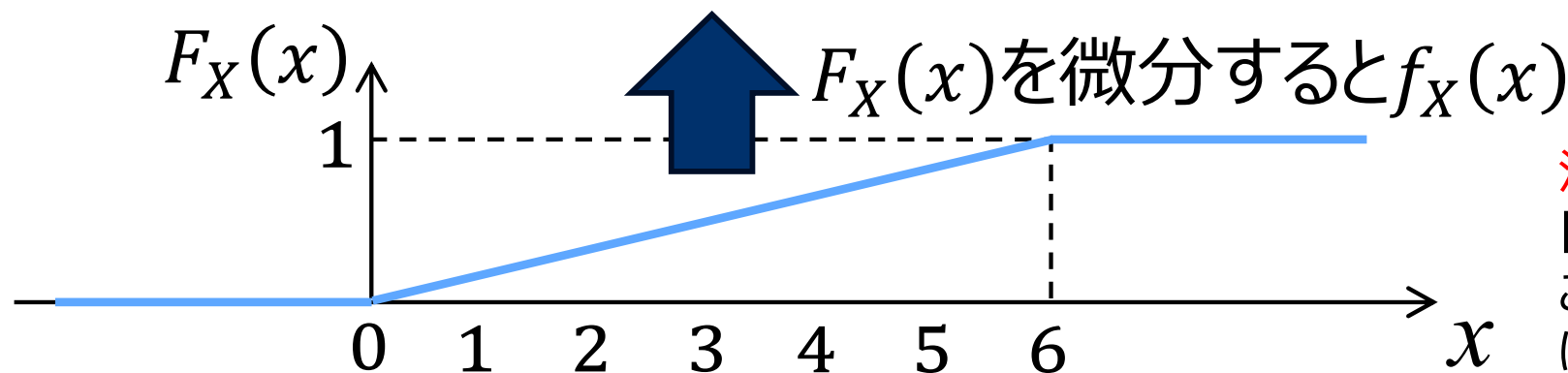
$$f_X(x) \geq 0 \quad (5-8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = F_X(\infty) - F_X(-\infty) = 1 \quad (5-9)$$

◆サイコロの目を確率変数とするとき、事象は6つあり、確率密度関数 $f_X(x)$ は以下のようなになる。



(5-9)式で示したように、 x が $-\infty$ から ∞ の範囲を積分すると、面積は1になる。



注. サイコロの目は離散的だが、ここでは連続的に表現した。

◆ 確率変数のべき乗 X^n を平均したものをモーメント(moment)という。

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad (5-10)$$

$n = 1$ は1次モーメントで、集合平均または期待値。

$n = 2$ の2次中心モーメントは、分散(variance)。

$n = 3$ は3次モーメントで、歪度（分布の非対称性）。

$n = 4$ は4次モーメントで、尖度（分布の尖り具合）。

注. 中心化とは平均を0にすること。

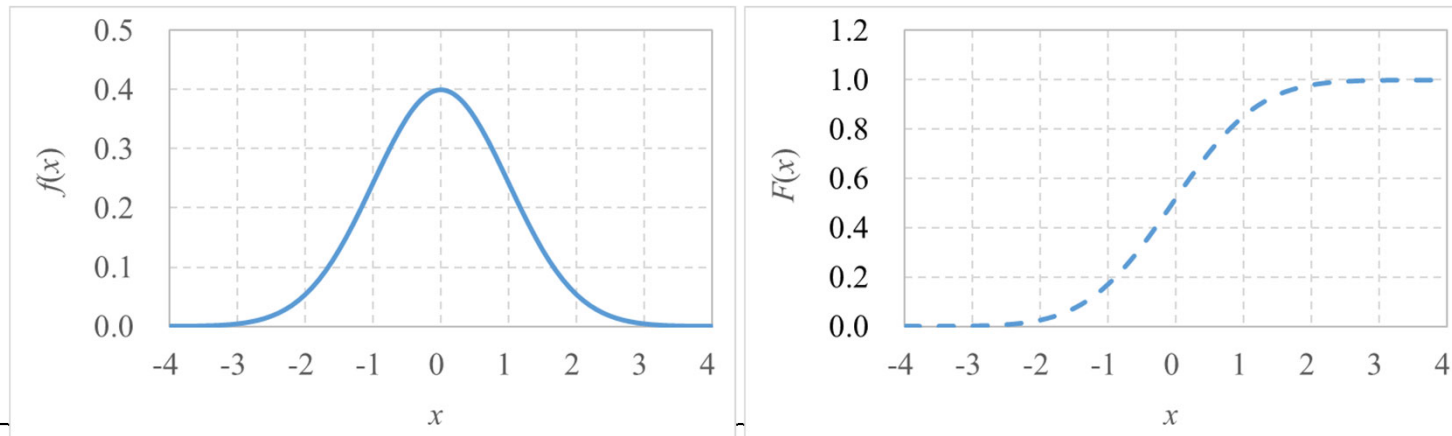
◆サイコロの目の集合平均（期待値）を求めよ。



- ◆ 下式の確率密度関数を、**正規分布**(normal distribution)または**ガウス分布**(Gaussian distribution)という。

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (5-11)$$

- ◆ ここで、 μ は集合平均、 σ^2 は分散である。



注. $\mu = 0$ 、 $\sigma^2 = 1$ の場合の正規分布 (左図)と、累積分布関数(右図)。

目次

1. 確率変数・分布関数・確率密度関数
2. 多変量分布
3. 確率過程
4. 白色雑音
5. 帯域通過雑音

- ◆ 確率変数が複数の分布を、**多変量分布**という。
- ◆ 2個の確率変数 X_1, X_2 を結合した場合の**結合分布関数**(joint distribution function)は次式で定義される。

$$F_X(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \quad (5-12)$$

この式は、 $X_1 \leq x_1$ かつ $X_2 \leq x_2$ となる確率を表す。

- ◆ 2個の確率変数 X_1, X_2 を結合した場合の**結合確率密度関数**(joint probability density function)は、偏微分を用いて次式で表される。

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (5-13)$$

$$F_X(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_X(u_1, u_2) du_1 du_2 \quad (5-14)$$

- ◆ 確率変数 X_1 あるいは X_2 それぞれの確率密度関数 $f_X(x_1)$ と $f_X(x_2)$ は、結合確率密度関数を**周辺積分**することで得られる。

$$f_X(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2) dx_2 \quad (5-13a)$$

$$f_X(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2) dx_1 \quad (5-13b)$$

x_1 で積分することによって、 x_2 だけが残る。

◆ **結合モーメント**は次の式で得られる。

$$E[X_1^m, X_2^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^m x_2^n f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (5-14)$$

◆ $m = 1, n = 1$ の場合を、**相互相関** (cross correlation)という。

$$E[X_1, X_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (5-15)$$

◆ $X_2 = x_2$ という条件での X_1 の確率密度関数 $f_X(x_1|x_2)$ を次のように定義する。

$$f_X(x_1|x_2)dx_1 = P(x_1 \leq X_1 \leq x_1 + dx_1 | X_2 = x_2) \quad (5-16)$$

幅 dx_1 を掛けて積分しているのので左辺は分布関数に相当。

$$f_X(x_1|x_2)dx_1 \cdot f_X(x_2)dx_2 = f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (5-17)$$

◆ ここから、次式の**ベイズの定理**が導かれる。

$$f_X(x_1|x_2) = \frac{f_X(x_1, x_2)}{f_X(x_2)} = \frac{f_X(x_2|x_1)f_X(x_1)}{f_X(x_2)} \quad (5-18)$$

目次

1. 確率変数・分布関数・確率密度関数
2. 多変量分布
3. 確率過程
4. 白色雑音
5. 帯域通過雑音

- ◆ 時間とともに変化する事象の確率変数の集合を、**確率過程**(stochastic process)またはランダム過程(random process)という。
- ◆ $k (= 0, 1, \dots)$ 番目の時刻 t_k における確率変数 X_k の集合平均は次の式で表される。

$$E[X_k] = \int_{-\infty}^{\infty} x_k f_X(x_k) dx_k \quad (5-19)$$

ここでは、添え字の k は時刻が違ふことを意味している。よって、 X_1 と X_2 は、ある同一の事象についての確率変数である。

- ◆ 2つの時刻 t_1, t_2 での確率変数を X_1, X_2 とすると、これら2変数の1次結合モーメントを**自己相関関数**(autocorrelation function)といい、次式で表される。

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X_1 X_2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (5-20)$$

- ◆ 自己相関は、同一事象についての2つの時刻の確率変数 X_1, X_2 の相互相関の形である。

- ◆ 確率過程の**定常性**(stationarity)には狭義と広義の2通りがある。
- ◆ 異なる時刻の確率変数の確率密度関数が同じであることを、**狭義の定常**という。
- ◆ 異なる時刻(時間差 τ)の確率変数の確率密度関数が同一であるかに関わらず、集合平均が同じで、自己相関関数が同じであることを、**広義の定常**という。

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)] \quad (5-21)$$

- ◆ 確率過程のエルゴード性(Ergodicity)とは、多数の観測対象の集合平均(アンサンブル平均)が、長期間の観測における時間平均と一致する性質である。
- ◆ 時間をかけて観測したときに、どの状態から開始しても、最終的にすべての状態を通過するかどうかを意味する。
- ◆ この性質がある場合、ただ1つの事象を長時間観測するだけでシステム全体を推定できる。

- ◆ 定常の確率過程について、下式のように、集合平均と時間平均が等しい場合、この確率過程は ① に関するエルゴード性がある。

$$E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) dt \quad (5-22)$$

- ◆ 同様に、自己相関がその時間平均と等しい場合、② に関するエルゴード性がある。

$$R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)X(t + \tau) dt \quad (5-23)$$

- ◆ 第4講で、周波数成分をもつ複素信号のスペクトル密度について述べた。ここでは、雑音のような不規則な信号すなわち確率過程のスペクトルについて考える。

- ◆ 自己相関関数 $R_x(\tau)$ のフーリエ変換を $G_x(f)$ とすると、ウィーナー・ヒンチンの定理より以下となる。

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[G_x(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (5-24a)$$

$$G_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (5-24b)$$

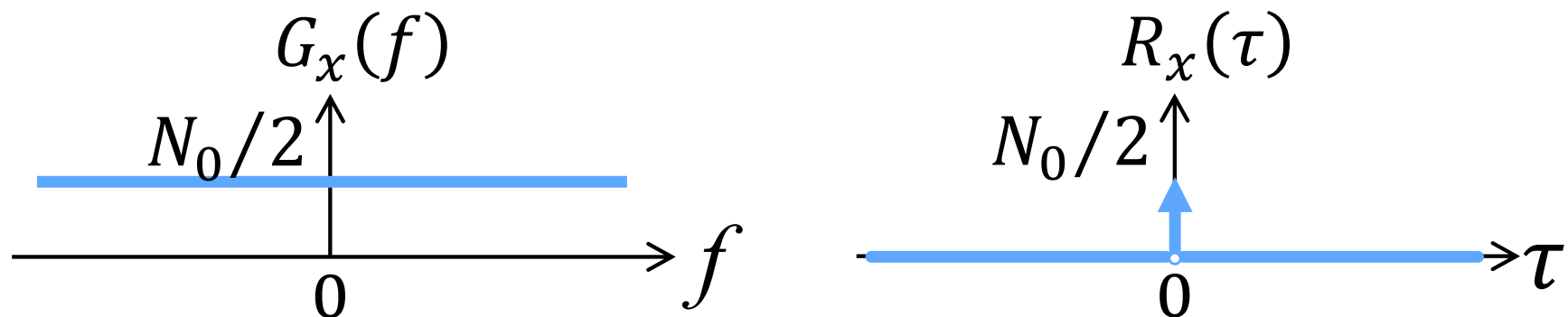
- ◆ この $G_x(f)$ が確率過程 $X(t)$ の電力スペクトル密度である。

目次

1. 確率変数・分布関数・確率密度関数
2. 多変量分布
3. 確率過程
4. 白色雑音
5. 帯域通過雑音

- ◆ 電力スペクトル密度がすべての周波数で一定となる雑音を、**白色雑音** (white noise) という。

$$G_X(f) = N_0/2, \quad -\infty < f < \infty \quad (5-25)$$



- ◆ ここで、 N_0 は定数である。正と負の両側スペクトルを、正の周波数へ折り返すと N_0 になる。
- ◆ 異なる時刻の白色雑音どうしは無相関。



- ◆ 通信系で発生する雑音のうち、熱雑音は、その振幅の確率密度が
- ① 分布に従う。

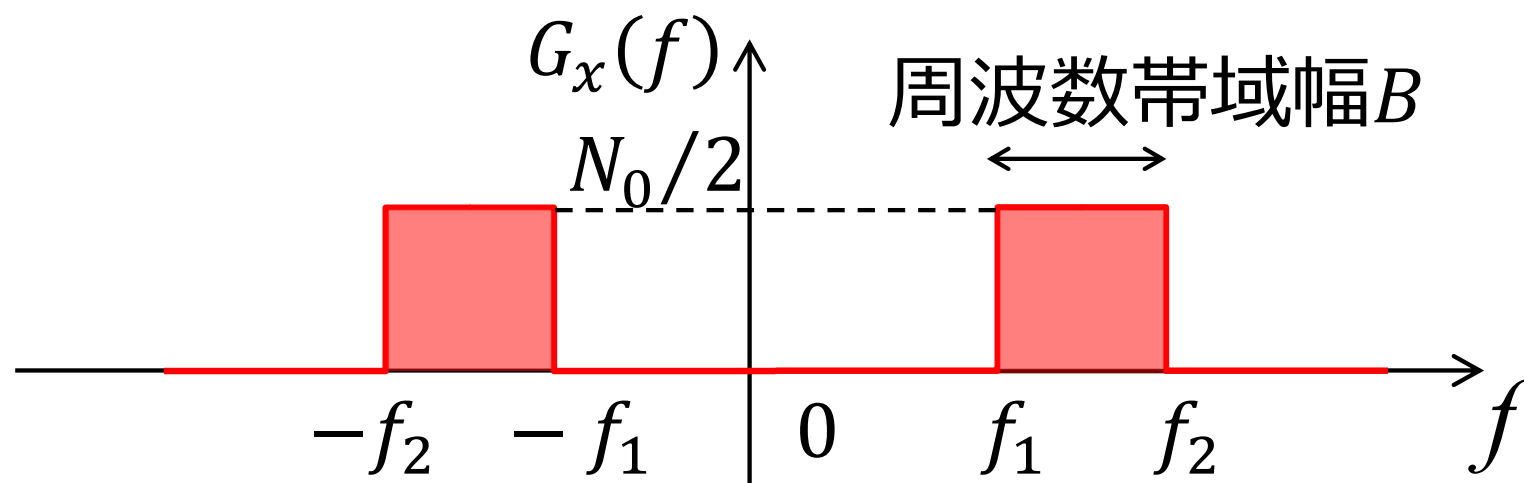
選択肢

1. ガウス
2. ポアソン
3. 一様
4. 指数
5. 二項

目次

1. 確率変数・分布関数・確率密度関数
2. 多変量分布
3. 確率過程
4. 白色雑音
5. 帯域通過雑音

- ◆ 信号の伝送では、第4講に示した帯域通過フィルタ(BPF)を通過させ、不要な雑音を低減する。雑音の電力スペクトル密度は、下図になる。



$$G_x(f) = \begin{cases} N_0/2, & f_1 \leq |f| \leq f_2 \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (5-26)$$

- ◆ 帯域通過雑音の自己相関関数は、次のようになる。

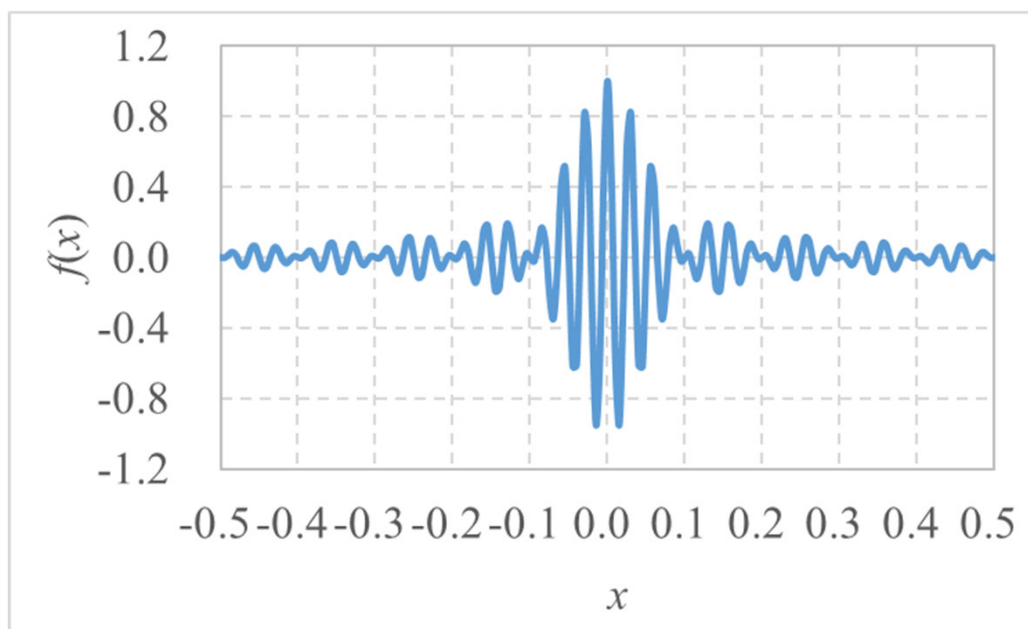
$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[G_x(f)] \\ &= \int_{-f_2}^{-f_1} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df + \int_{f_1}^{f_2} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \frac{N_0}{2} \left[\frac{e^{j2\pi f\tau}}{j2\pi\tau} \right]_{-f_2}^{-f_1} + \frac{N_0}{2} \left[\frac{e^{j2\pi f\tau}}{j2\pi\tau} \right]_{f_1}^{f_2} \end{aligned} \quad (5-27)$$

次のページへつづく

$$\begin{aligned} &= \frac{N_0}{j4\pi\tau} \left(e^{-j2\pi f_1\tau} - e^{-j2\pi f_2\tau} + e^{j2\pi f_2\tau} - e^{j2\pi f_1\tau} \right) \\ &= \frac{N_0}{2\pi\tau} [\sin(2\pi f_2\tau) - \sin(2\pi f_1\tau)] \\ &= \frac{N_0}{2\pi\tau} [2 \sin(\pi f_2\tau) \cos(\pi f_2\tau) - 2 \sin(\pi f_1\tau) \cos(\pi f_1\tau)] \\ &= \frac{N_0}{\pi\tau} \{ [\sin(\pi f_2\tau) \cos(\pi f_1\tau) - \cos(\pi f_2\tau) \sin(\pi f_1\tau)] \\ &\times [\cos(\pi f_2\tau) \cos(\pi f_1\tau) - \sin(\pi f_2\tau) \sin(\pi f_1\tau)] \} \\ &= \frac{N_0}{\pi\tau} [\sin(\pi f_2\tau - \pi f_1\tau) \cos(\pi f_2\tau + \pi f_1\tau)] \end{aligned} \quad (5-27)$$

次のページへつづく

$$\begin{aligned}
 &= \frac{N_0}{\pi\tau} \sin[\pi(f_2 - f_1)\tau] \cos[\pi(f_2 + f_1)\tau] \\
 &= N_0(f_2 - f_1) \frac{\sin[\pi(f_2 - f_1)\tau]}{\pi(f_2 - f_1)\tau} \cos[\pi(f_2 + f_1)\tau] \\
 &= N_0(f_2 - f_1) \operatorname{sinc}[\pi(f_2 - f_1)\tau] \cos[\pi(f_2 + f_1)\tau]
 \end{aligned}
 \tag{5-27}$$



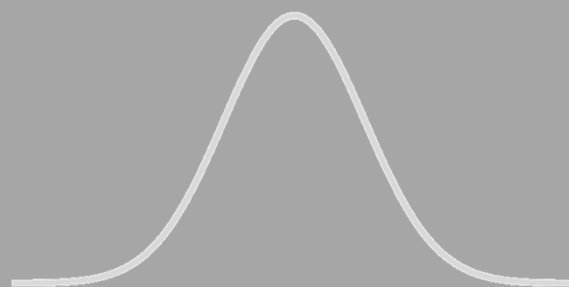
注. $\tau = 0$ での全帯域電力を $N_0(f_2 - f_1) = 1$ とした。包絡線がsinc関数になっている。

- ◆ アナログ伝送方式の多重化された伝送路で発生する雑音のうち、増幅器内部で発生する平均雑音電圧 E は、 $E = \sqrt{4kTRB}$ で表される。ここで、 B は対象とする
- ① を表している。

選択肢

1. 変調度
2. バイアス電圧
3. 磁束密度
4. 雑音指数
5. 周波数帯域幅

Thank you.



伝送システム理論

Transmission system theory

第6講 通信路容量

Lecture 6: Communication channel capacity



古川 靖

埼玉工業大学 工学部 情報システム学科

目次

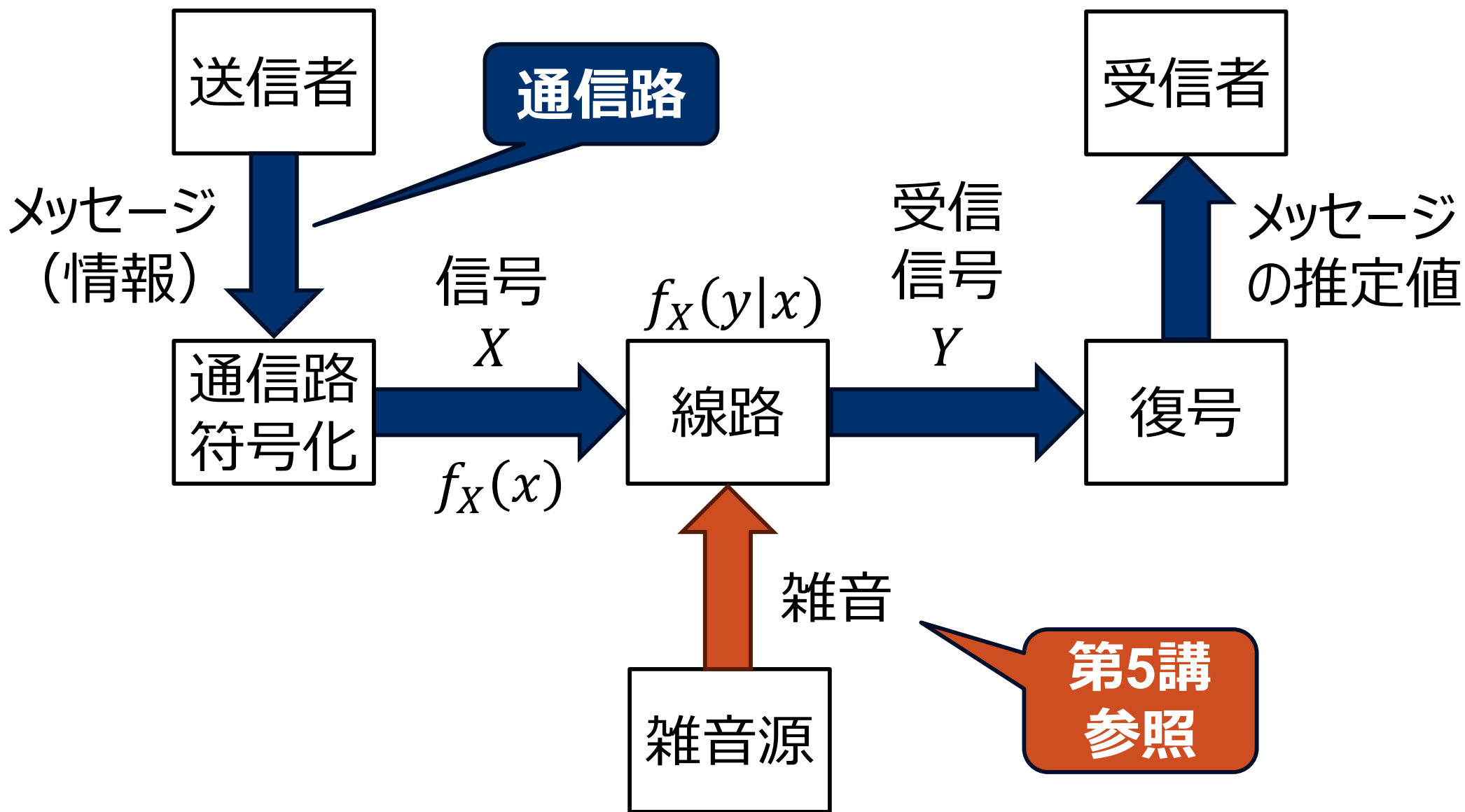
1. 通信路、通信システムのモデル
2. エントロピーと相互情報量
3. 通信路容量
4. 帯域制限された白色雑音通信路の容量

◆通信路(Channel)

- ◆情報が伝わる空間や論理的経路のこと。
- ◆情報通信の**理論計算**で用いる抽象的概念。

◆伝送路(Transmission Line)

- ◆信号を伝送する具体的なハードウェア線路。
- ◆光ファイバケーブル等を指す物理的概念。



目次

1. 通信路、通信システムのモデル
2. エントロピーと相互情報量
3. 通信路容量
4. 帯域制限された白色雑音通信路の容量

- ◆ 通信路の伝送速度を計算するために用いるエントロピー、相互情報量を定義する。
- ◆ エントロピー(entropy)は、物理的な無秩序さや、情報理論の不確かさを表す指標であり、離散確率変数において、次式で定義される。

$$H(X) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} f_X(x) \log_2 f_X(x) \quad (6-1)$$

底が2のとき、単位はビット(bit)である。

- ◆ 2つの事象 $\mathcal{X} = \{a_1, a_2\}$ があり、各事象の確率が $f_X(a_1) = 0.5$ 、 $f_X(a_2) = 0.5$ の場合のエントロピーを計算せよ。



- ◆ 離散的な確率変数に対するエントロピーは Σ 記号を用いて(6-1)式で定義したが、連続する確率変数に対するエントロピーは次式で定義する。

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log_2 f_X(x) dx \quad (6-2)$$

- ◆ 複数の確率変数についての不確かさは、次式の**結合エントロピー**で定義する。

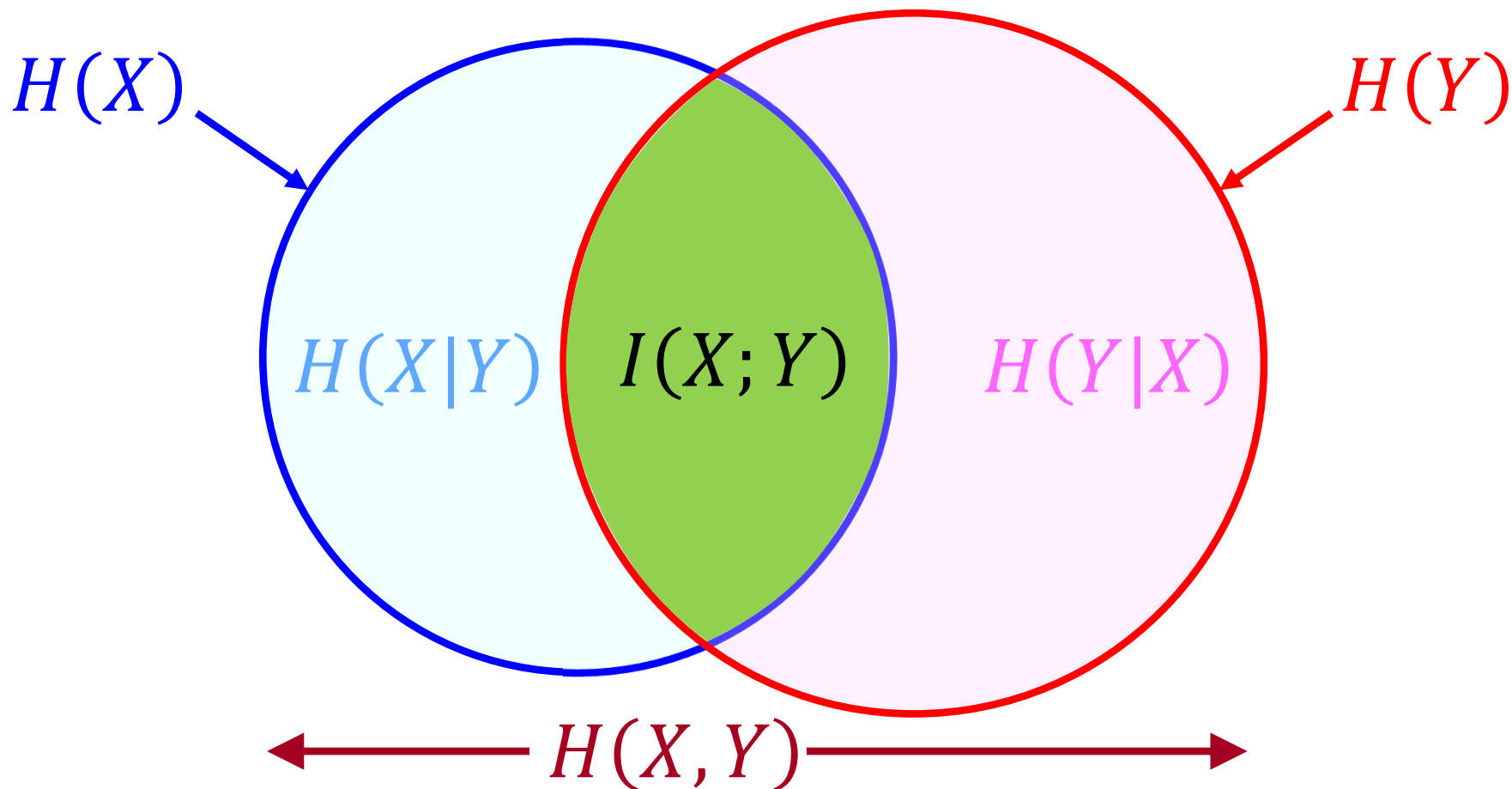
$$H(X, Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log_2 f(x, y) dx dy \quad (6-3)$$

- ◆ 確率変数 X, Y が独立でない場合、確率変数 Y には確率変数 X の情報が一部分含まれている。確率変数 Y がわかっている場合、確率変数 X の不確かさは減少する。そのときの不確かさを、**条件付きエントロピー** (conditional entropy) といい、次式で表される。

$$H(X|Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log_2 f(x|y) dx dy \quad (6-4)$$

第5講の条件付き確率を参照。

◆ エントロピーの関係は次のベン図で表される。



$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y) \quad (6-5)$$

- ◆ ベン図において、2つの確率変数 X, Y に共通して存在する不確かさの部分を、**相互情報量** (mutual information) といい、次式で表される。

$$I(X; Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log_2 \frac{f(x, y)}{f(x)f(y)} dx dy \quad (6-6)$$

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \end{aligned} \quad (6-7)$$

- ◆ 2つの確率変数 X, Y について、 $H(X) = 1$ 、 $H(Y) = 1.5$ 、 $H(X, Y) = 2$ のとき、条件付きエントロピー $H(X|Y)$ および $H(Y|X)$ 、相互情報量 $I(X; Y)$ を計算せよ。

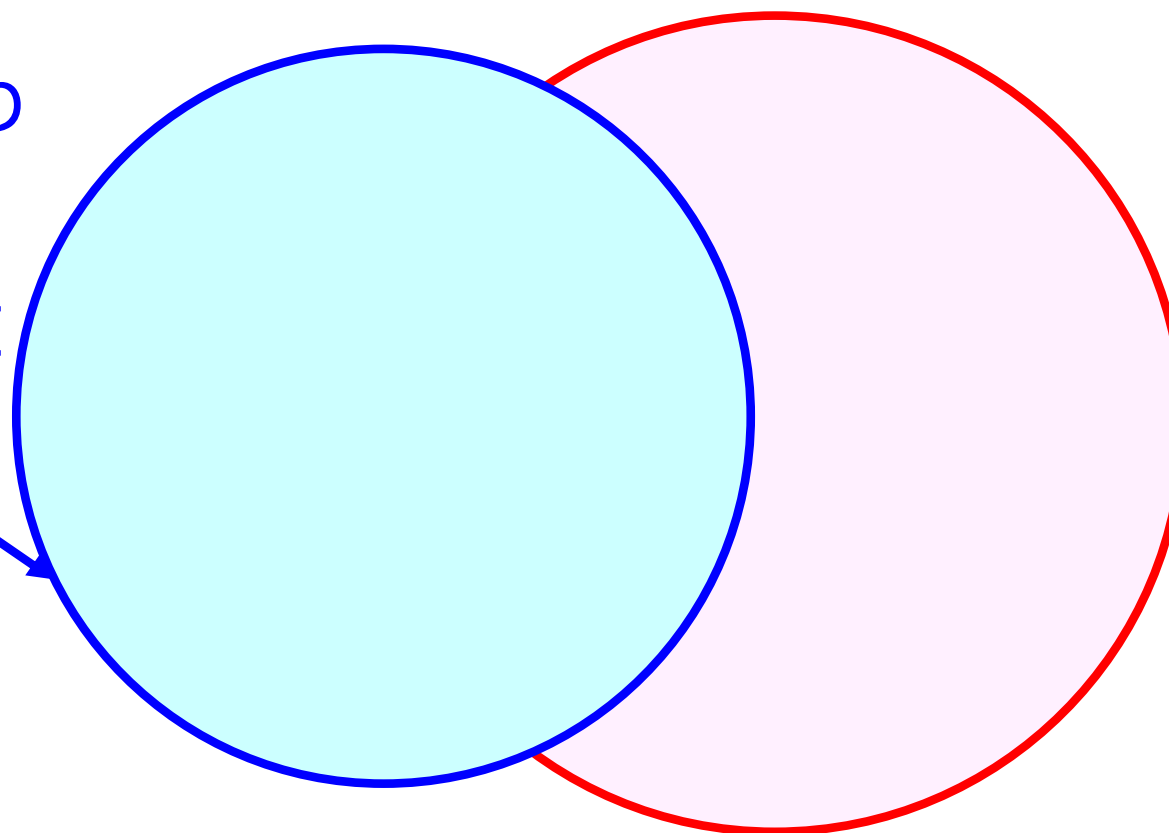


目次

1. 通信路、通信システムのモデル
2. エントロピーと相互情報量
3. 通信路容量
4. 帯域制限された白色雑音通信路の容量

- ◆ 情報は、複数の符号からなる信号 X として伝送される。符号は1つではないので不確かさ $H(X)$ が存在する。

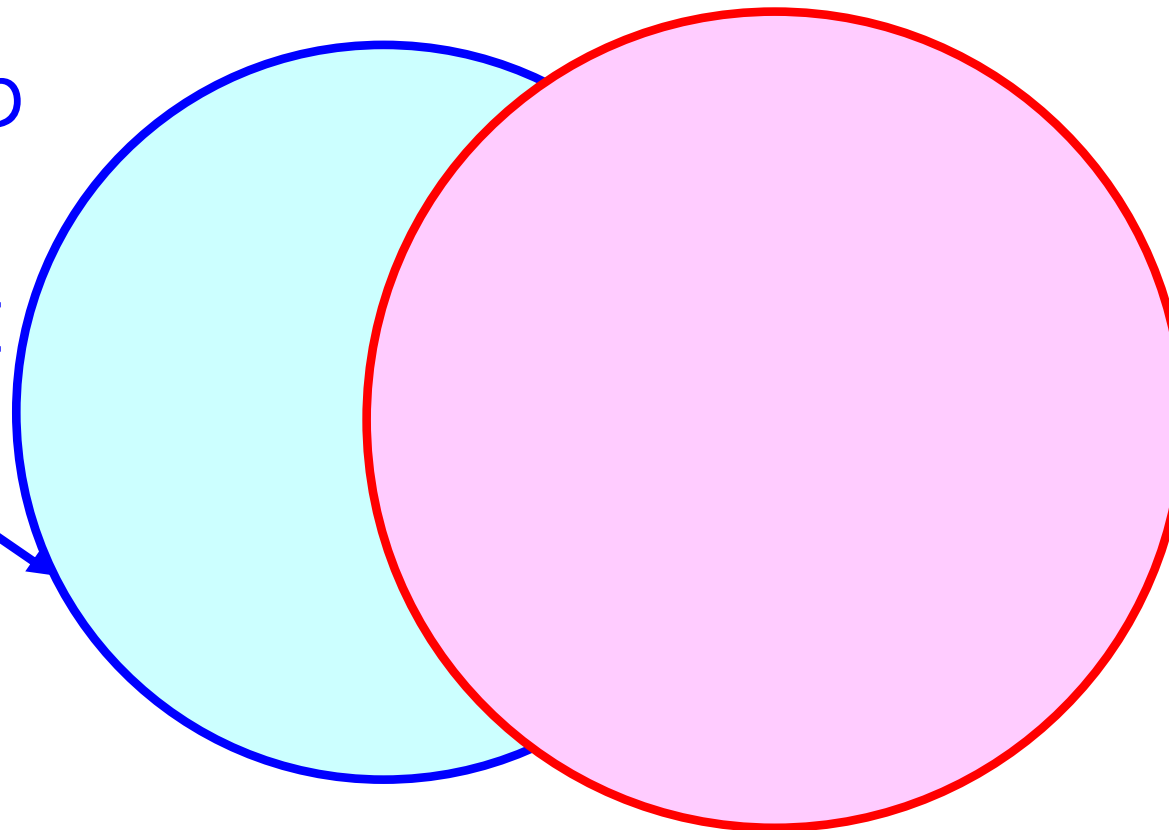
受信者にとっての伝送前信号の不確かさ $H(X)$



受信信号の不確かさ $H(Y)$

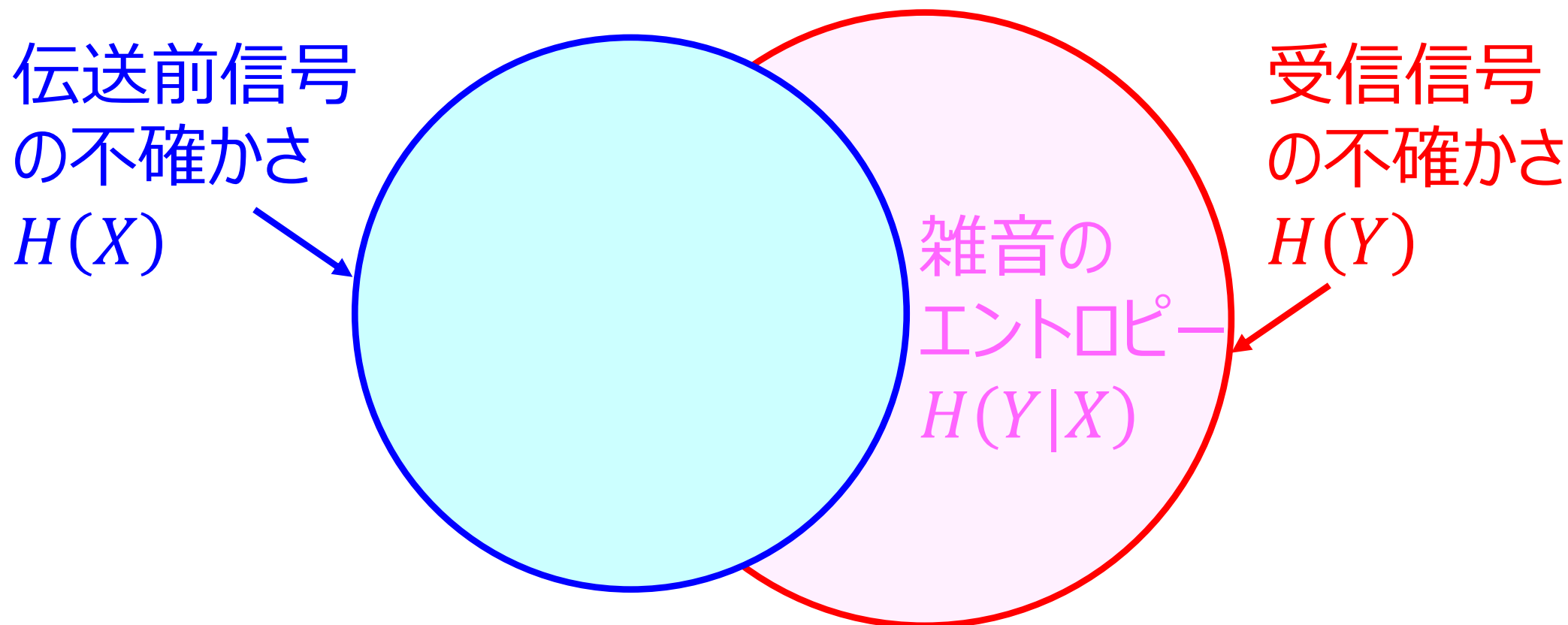
- ◆ 受信信号 Y も同様に複数の符号があるので、不確かさ $H(Y)$ が存在する。

受信者にとっての伝送前信号の不確かさ $H(X)$



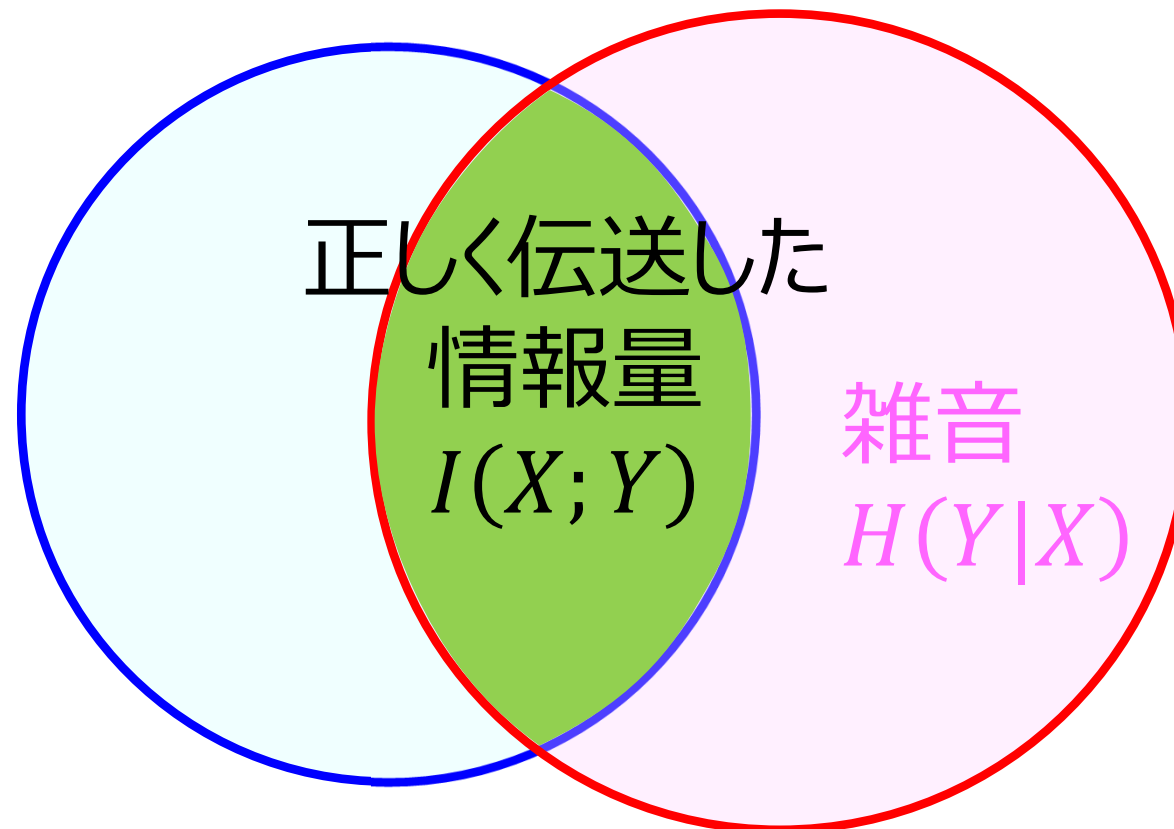
受信信号の不確かさ $H(Y)$

- ◆ Y は、もとの信号 X と同一であることが望ましいが、不要な雑音によるエントロピー $H(Y|X)$ が追加される。

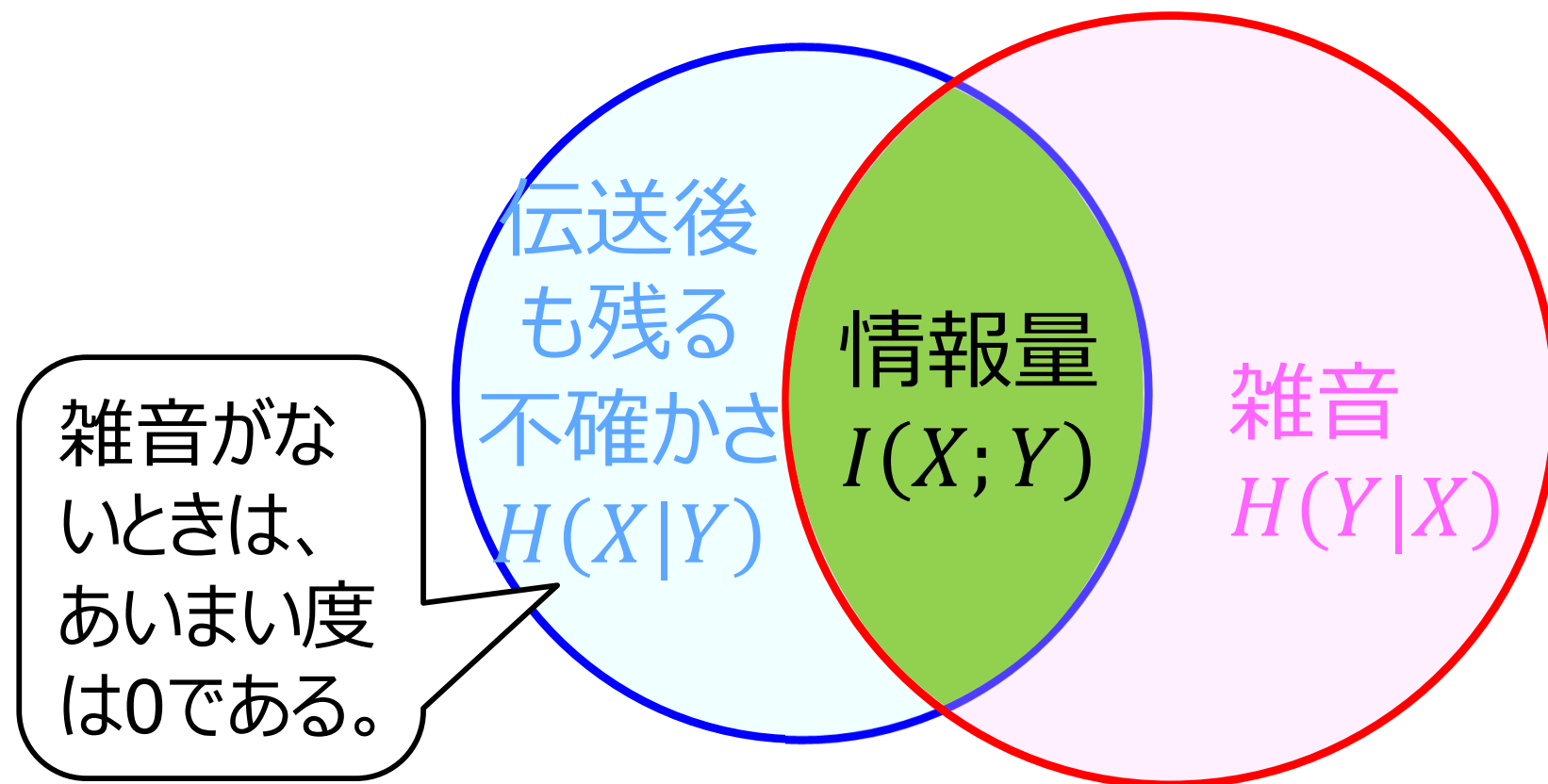


- ◆ 1秒あたりに情報を正しく伝送できる**伝送速度**は、次の式で表される。

$$R = I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (6-8)$$



- ◆ 受信信号 Y によって、もとの信号 X の不確かさは、正しく伝送できた相互情報量 $I(X; Y)$ だけ減る。伝送後も残る $H(X|Y)$ はあいまい度という。



- ◆ 通信路で送れる情報量が最大になるように、信号 X の確率密度関数 $f(x)$ を設定するとき、伝送速度を**通信路容量**(channel capacity)といい、次式で表される。

$$C = \max_{f(x)} I(X; Y) \quad (6-9)$$

- ◆ 伝送速度 R と通信路容量 C の関係が、 $R < C$ ならば、誤り率の小さい通信路符号化法が存在する。一方、 $R > C$ となる通信路符号化法は存在しない。これを**通信路符号化定理**という。

- ◆ 信号 X を伝送した受信信号を Y とするとき、受信側のエントロピーを $H(Y) = 2$ 、雑音のエントロピーを $H(Y|X) = 0.3$ とすると、伝送速度 R を計算せよ。



目次

1. 通信路、通信システムのモデル
2. エントロピーと相互情報量
3. 通信路容量
4. 帯域制限された白色雑音通信路の容量

- ◆ 雑音を単一の確率変数と考えたときに、雑音振幅の確率密度関数が正規分布になり、かつ、その確率過程が白色スペクトルとなる雑音を、白色ガウス雑音(white Gaussian noise)という。
- ◆ 雑音が白色ガウス雑音である通信路のことを、**白色ガウス雑音通信路**という。

- ◆ 白色ガウス雑音通信路の通信路容量 C (bit/s) は次式で表される。

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 W} \right) = W \log_2 (1 + \text{SNR}) \quad (6-10)$$

- ◆ ここで、 W は帯域幅、 N_0 は片側雑音電力密度、 $N_0 W$ は白色雑音電力、 P は信号電力の上限とする。 $P / N_0 W = \text{SNR}$ は信号対雑音比 (Signal-to-Noise power Ratio) である。
- ◆ $W \rightarrow$ 大、 $\text{SNR} \rightarrow$ 小で、通信路容量 C が増える。

- ◆ 単位帯域あたりの通信路容量を**周波数利用効率**(spectral efficiency)とする。

$$\frac{C}{W} = \log_2(1 + \text{SNR}) \quad (6-11)$$

- ◆ さらに以下の対数の近似式を用いて変形する。

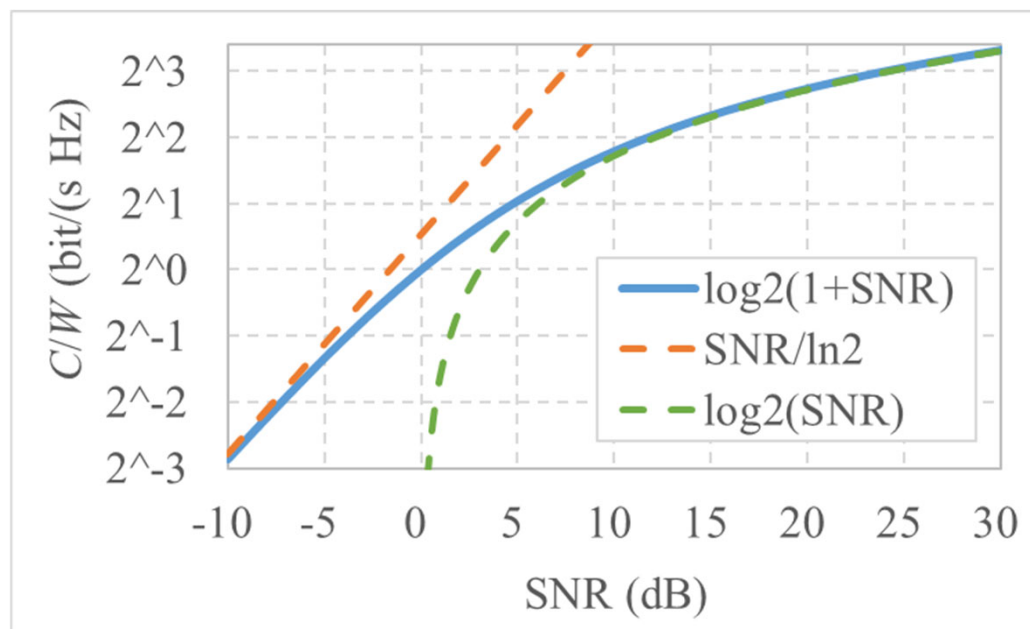
$$\begin{aligned} \log_2(1 + x) &\approx \frac{\ln(1 + x)}{\ln 2} \approx \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots}{\ln 2} \\ &\approx \frac{x}{\ln 2}, \quad x \approx 0 \end{aligned} \quad (6-12a)$$

$$\log_2(1 + x) \approx \log_2 x, \quad x \gg 0 \quad (6-12b)$$

◆ 周波数利用効率は次式になり下図が得られる。

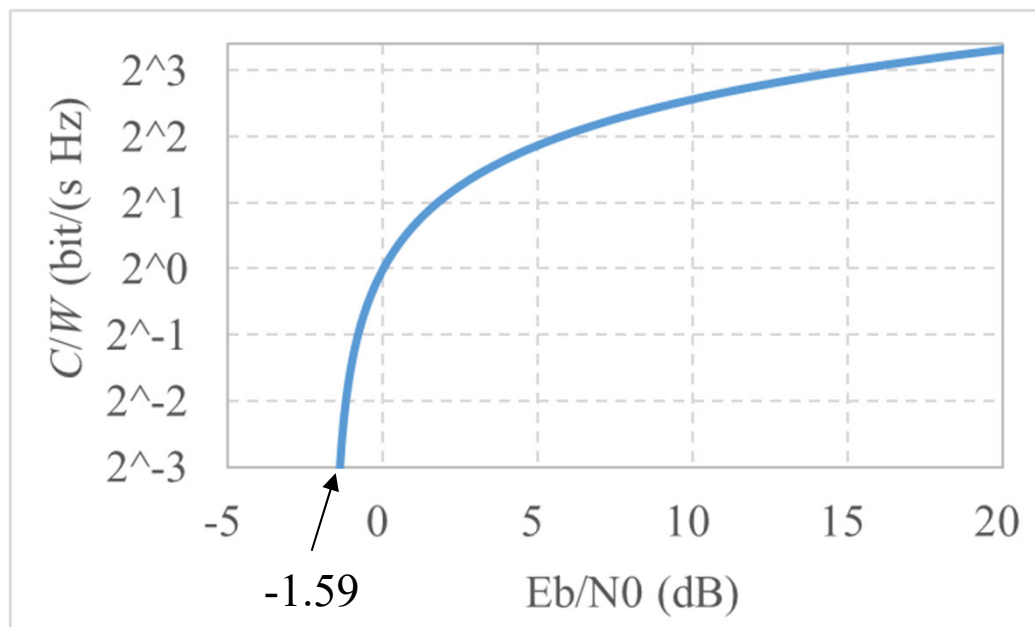
$$\frac{C}{W} = \frac{\text{SNR}}{\ln 2}, \quad \text{SNR} \approx 0 \quad (6-13a)$$

$$\frac{C}{W} = \log_2 \text{SNR}, \quad \text{SNR} \gg 0 \quad (6-13b)$$




- ◆ 1ビットあたりのエネルギーを E_b とすると、信号電力 P を通信路容量を C と等しい伝送速度で送るとき、 $E_b = P/C$ である。(6-10)式を変形すると、

$$1 + \frac{P}{N_0 W} = 2^{C/W}$$
$$\frac{E_b C}{N_0 W} = 2^{C/W} - 1$$
$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{C/W} - 1}{C/W} \quad (6-14)$$

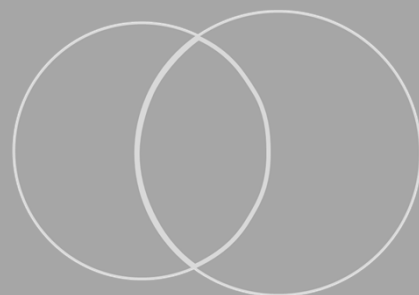


- ◆ 信号電力の関数である横軸 E_b/N_0 が小さくなると、縦軸 C/W が大幅低下、すなわち必要な帯域幅が $W \rightarrow \infty$ になる。このときの $E_b/N_0 = -1.59$ dB をシャノン限界(Shannon limit)という。

◆ 伝送帯域幅とデータ伝送速度の関係を  表す法則は、一般に、① の定理といわれ、信号電力、雑音電力、使用する通信路の周波数帯域幅が決まると、その通信路で遅れる最大伝送速度(通信容量)が計算できる。

選択肢： 1. テブナン 2. クーロン
3. ホール 4. ベルヌーイ 5. シャノン

Thank you.



伝送システム理論

Transmission system theory

第7講 振幅変調

Lecture 7: Amplitude modulation



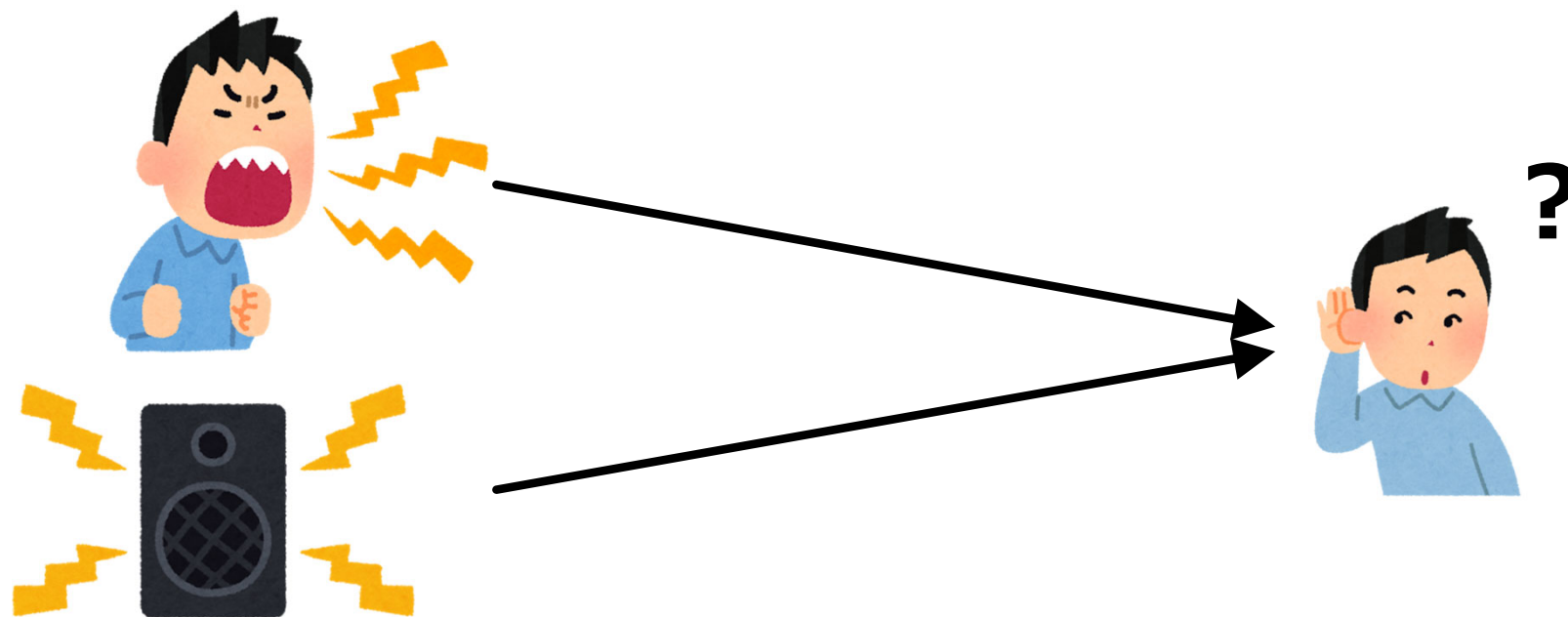
古川 靖

埼玉工業大学 工学部 情報システム学科

目次

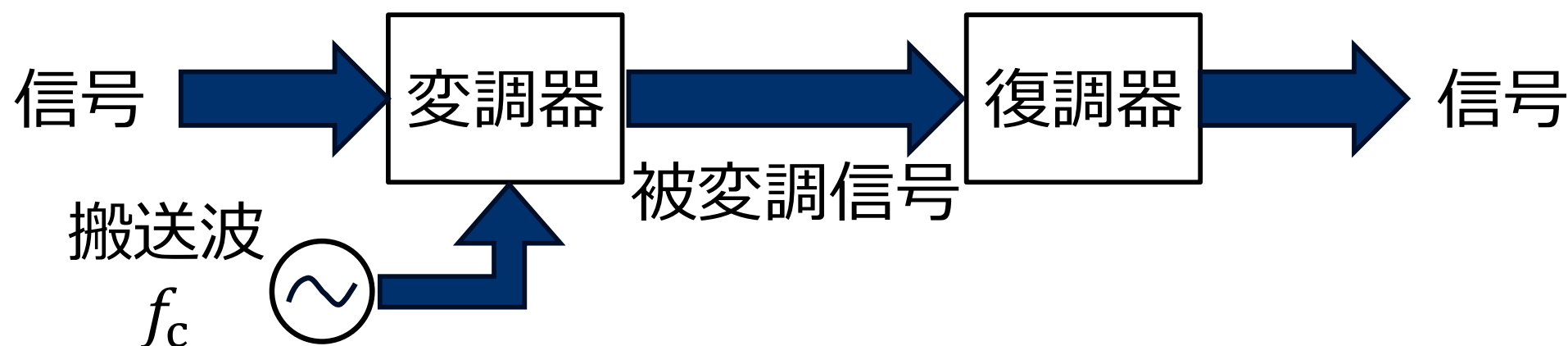
1. 搬送波と変調
2. 振幅変調
3. AM信号の生成と復調
4. 搬送波・側帯波の電力
5. 信号対雑音電力比
6. 両側波帯変調

- ◆ 音声は4 kHz、音楽は20 kHz程度の周波数帯域である。大きな音を出せば、ある程度の距離まで届くが、聞いている人には混じってしまう。



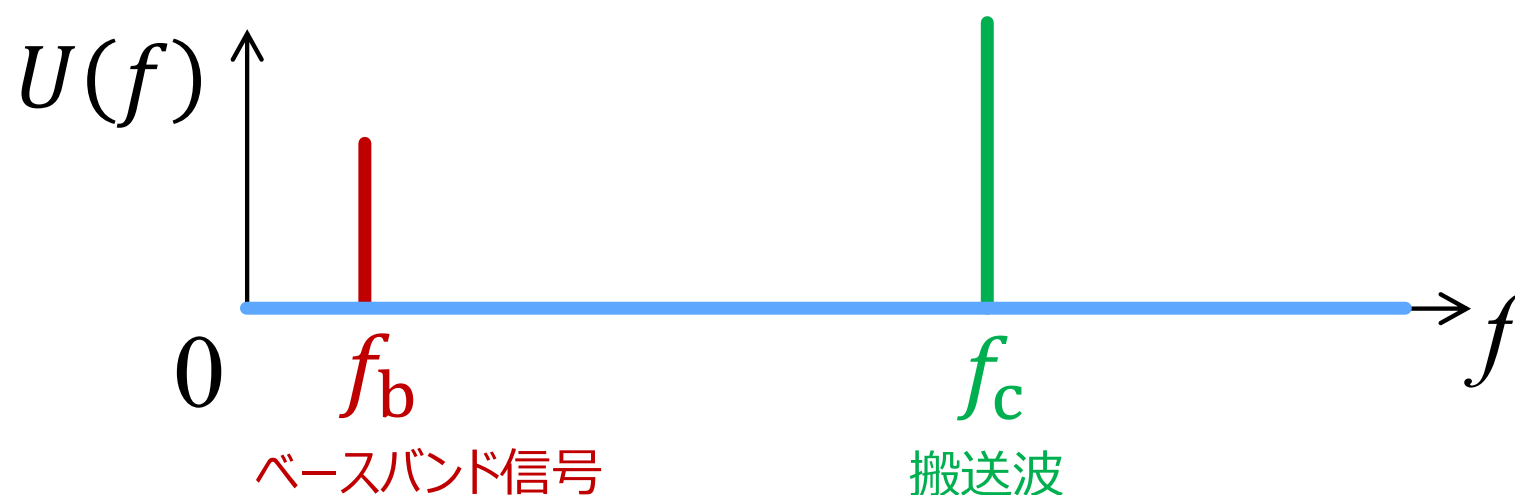
それぞれ別の信号に変換して区別するとよい。

- ◆ 信号を別の周波数に変換して送ることを**変調** (modulation)という。変換する別の周波数の電磁波を、**搬送波** (carrier)という。搬送波が電波ならば無線通信、搬送波が光波ならば光通信である。変調信号から元の信号を取り出すことを**復調** (demodulation)という。

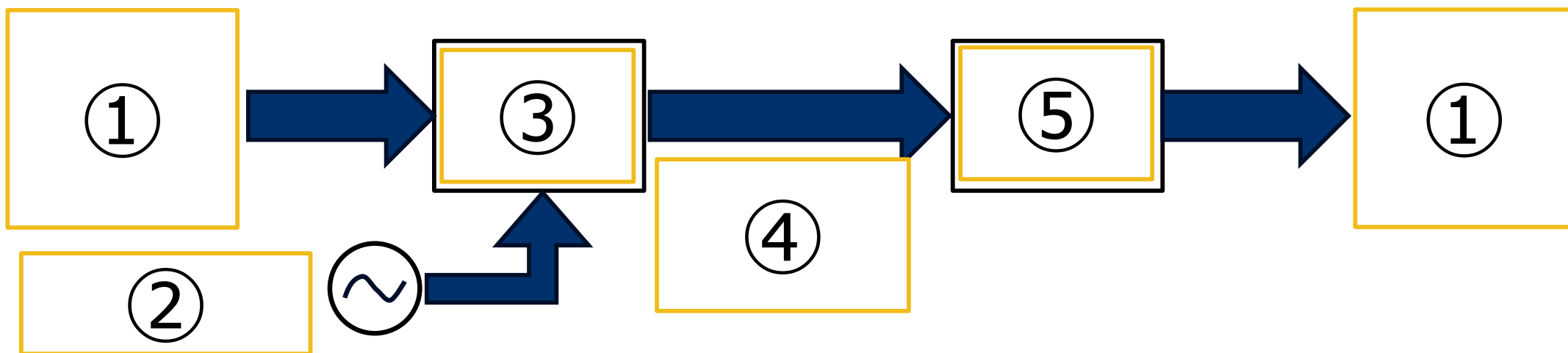


搬送波とベースバンド信号の周波数

- ◆ 搬送波には、伝送する信号よりも十分に高い周波数を用いる。これをキャリア周波数といい、一般に f_c で表すことが多い。
- ◆ 直流側にある伝送信号のことを、ベースバンド信号という。デジタル信号処理はベースバンドで行われる。



◆ 下図が変調動作の説明になるように、空欄①～⑤に最適な選択肢を記号で回答せよ。

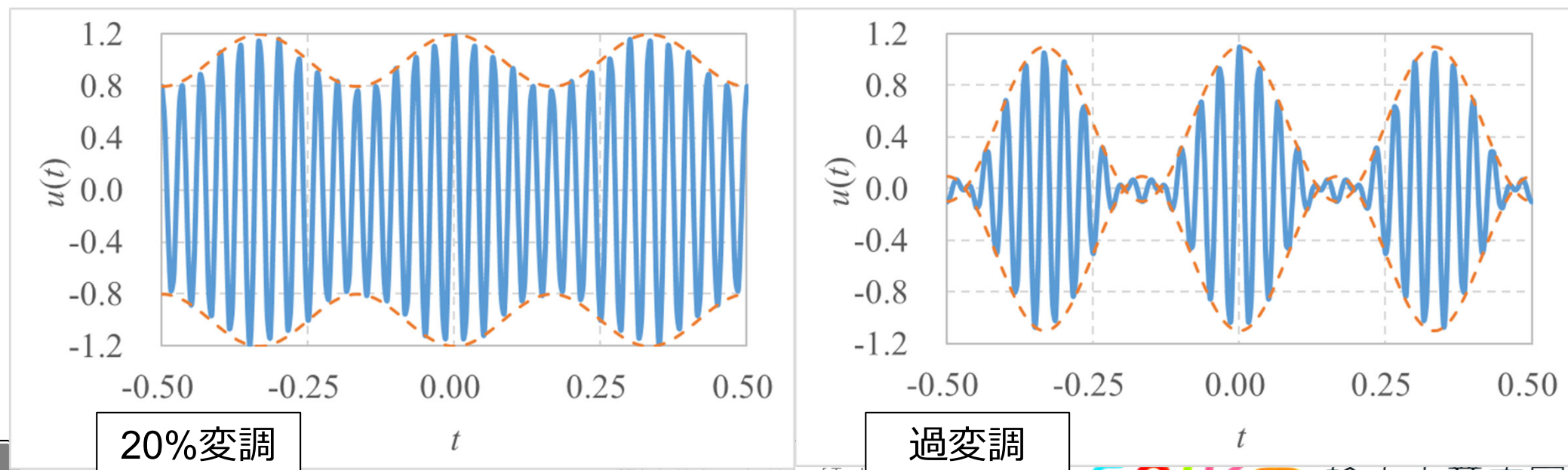


- ① 変調器、② 被変調信号、③ ベースバンド信号、
- ④ 受信信号、⑤ 送信信号、⑥ 復調器、⑦ 伝送、
- ⑧ 変換器、⑨ 復調器、⑩ 搬送波

目次

1. 搬送波と変調
2. 振幅変調
3. AM信号の生成と復調
4. 搬送波・側帯波の電力
5. 信号対雑音電力比
6. 両側波帯変調

- ◆ 伝送する信号の大きさに応じて搬送波の振幅を変える変調方式を、**振幅変調**(**amplitude modulation, AM**)という。
- ◆ 被変調信号の**包絡線**(envelope)に伝送するベースバンド信号が現れる。



20%変調

過変調

- ◆ 搬送波の振幅を A 、周波数を f_c 、時刻を t とし、信号 $s(t)$ を**変調指数** m で振幅変調して伝送するとき、被変調信号 $u(t)$ は次のように表される。

$$u(t) = A \underbrace{[1 + m s(t)]}_{\text{振幅を変化させる部分}} \underbrace{\cos(2\pi f_c t)}_{\text{搬送波の振動部分}} \quad (7-1)$$

振幅を変化させる部分

搬送波の振動部分

- ◆ 振幅の変化が大きく、 $1 + m s(t) < 0$ となる場合を、**過変調**(over modulation)といい、正しく復調できなくなる。

- ◆例えば、信号の振幅を1、周波数を f_b とすると、

$$s(t) = \cos(2\pi f_b t) \quad (7-2)$$

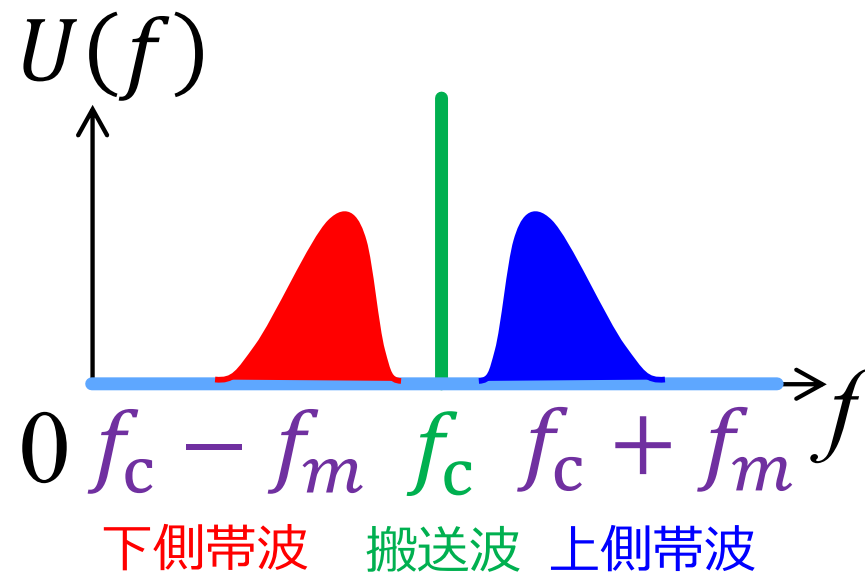
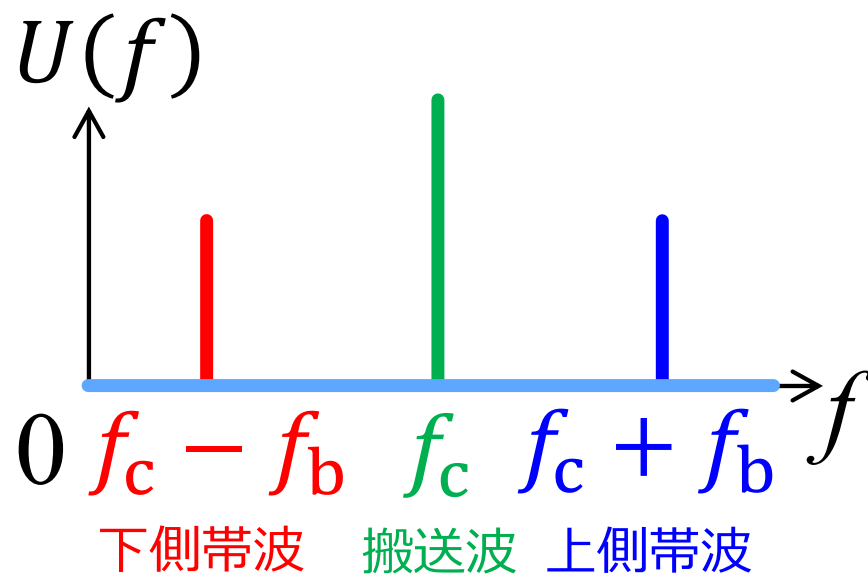
- ◆このとき、変調によって変化する振幅の値は、 $-A_m \leq A_m s(t) \leq A_m$ であり、変調振幅は A_m である。変調振幅と、搬送波振幅 A の比 $A_m/A = m$ を**変調度**(modulation degree)という。
- ◆変調指数と変調度は同じ m を指すが、変調指数は0 ~ 1、変調度は0% ~ 100%で表す。

◆ (7-2)式を(7-1)式に代入する。

$$\begin{aligned} u(t) &= A[1 + m \cos(2\pi f_b t)] \cos(2\pi f_c t) \\ &= A[\cos(2\pi f_c t) + m \cos(2\pi f_b t) \cos(2\pi f_c t)] \\ &= A \cos(2\pi f_c t) \\ &\quad + \frac{Am}{2} \cos[2\pi(f_c - f_b)t] + \frac{Am}{2} \cos[2\pi(f_c + f_b)t] \end{aligned} \quad (7-3)$$

◆ 搬送波成分 f_c の他に、側帯波成分が含まれる。
差周波 $f_c - f_b$ は下側帯波(lower sideband)、
和周波 $f_c + f_b$ は上側帯波(upper sideband)
である。

- ◆ 信号 $s(t)$ が単一の周波数 f_b のとき、スペクトルは左下図のように3つの周波数成分からなる。
- ◆ 単一周波数ではなく帯域幅 f_m の一般信号の場合は、右下図のようにスペクトルが広がる。



◆ オイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (7-4)$$

より、

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad (7-5a)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad (7-5b)$$

を用いて、(7-3)式を複素数で表す。

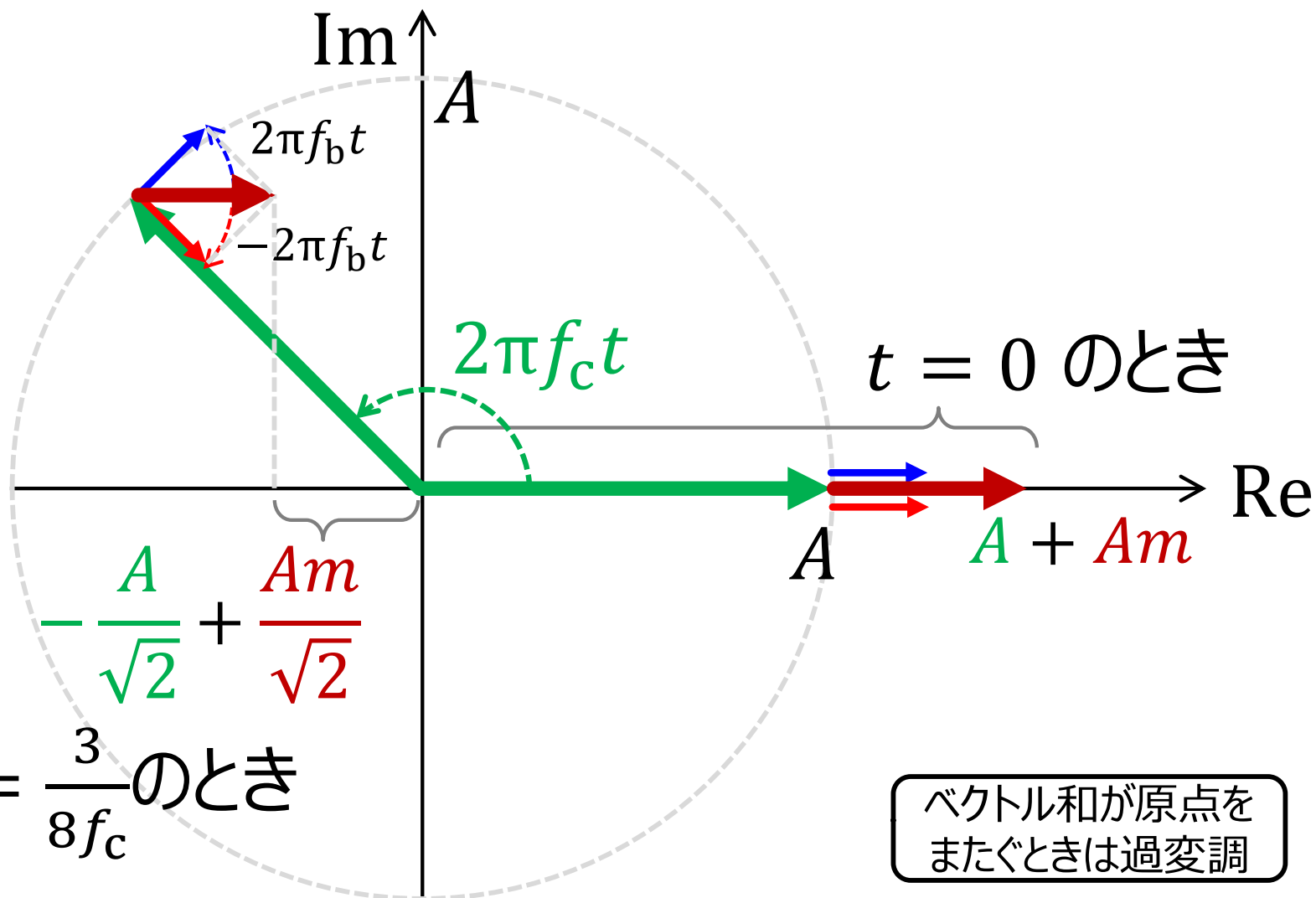
$$\begin{aligned}
 u(t) &= A[1 + m \cos(2\pi f_b t)] \cos(2\pi f_c t) \\
 &= A \left(1 + m \frac{e^{j2\pi f_b t} + e^{-j2\pi f_b t}}{2} \right) \frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2} \\
 &= A \left(\frac{e^{j2\pi f_c t}}{2} + m \frac{e^{j2\pi(f_c + f_b)t}}{4} + m \frac{e^{j2\pi(f_c - f_b)t}}{4} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-j2\pi f_c t}}{2} + m \frac{e^{-j2\pi(f_c + f_b)t}}{4} + m \frac{e^{-j2\pi(f_c - f_b)t}}{4} \right) \\
 &= A \operatorname{Re} \left[\left(1 + m \frac{e^{j2\pi f_b t} + e^{-j2\pi f_b t}}{2} \right) e^{j2\pi f_c t} \right] \quad (7-6)
 \end{aligned}$$

位相が逆符号
なので、
和は実
数になる。

Re[]は[]の実数部を表す。

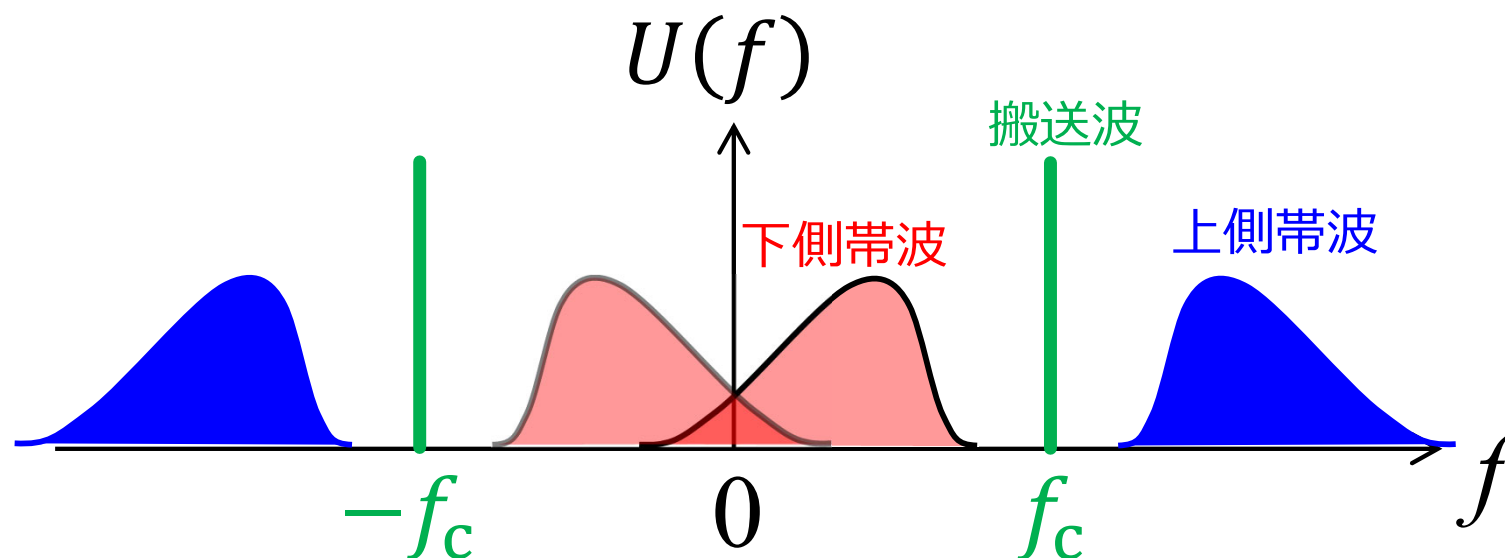
負の周波数 $-f_c$ 成分は正側と同じ
なので、2倍にして消した。

- ◆ 複素平面を時間とともに回転するベクトル和の実軸が、AM信号。



$f_b = \frac{f_c}{3}, t = \frac{3}{8f_c}$ のとき

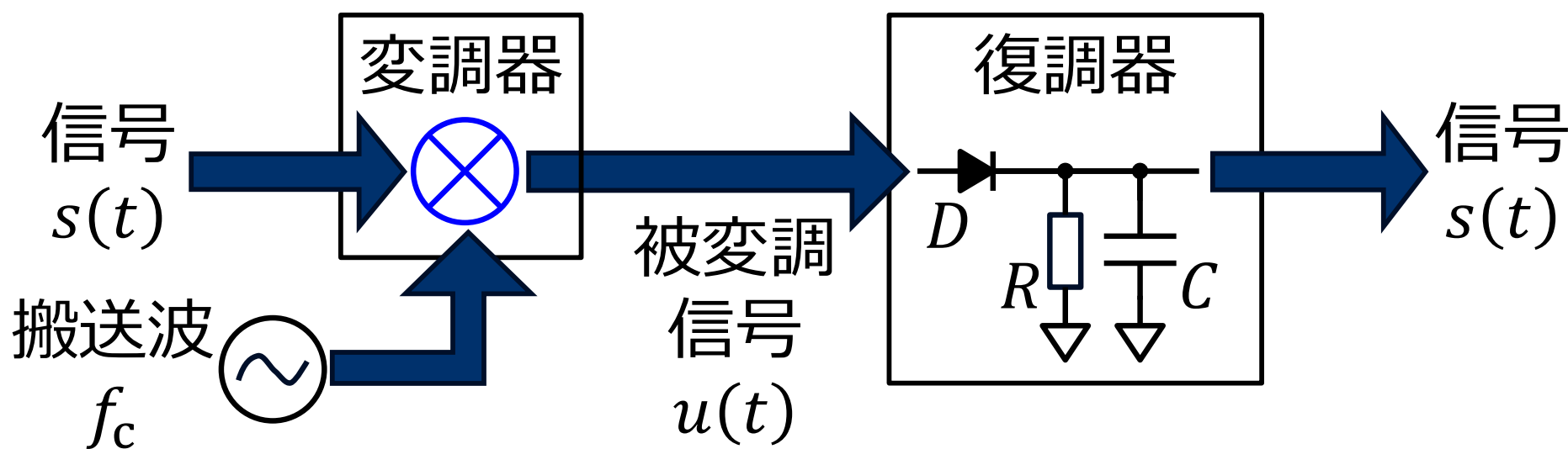
- ◆ AM信号には正の周波数 f_c と負の周波数 $-f_c$ が含まれている。
- ◆ 搬送波周波数がベースバンドの周波数よりも十分高くないと、下図のような重なりが発生してしまい、正しく伝送できない。



目次

1. 搬送波と変調
2. 振幅変調
3. AM信号の生成と復調
4. 搬送波・側帯波の電力
5. 信号対雑音電力比
6. 両側波帯変調

- ◆ AM信号は(7-1)式のように信号と搬送波の積であり、ダイオードを用いた**ミキサー**で乗算できる。
- ◆ 復調には**包絡線検波**を用いる。ダイオードで片側の符号だけを抽出し、RC並列フィルタで搬送波を除去する。



目次

1. 搬送波と変調
2. 振幅変調
3. AM信号の生成と復調
4. 搬送波・側帯波の電力
5. 信号対雑音電力比
6. 両側波帯変調

$$\begin{aligned}
P_{AM} &= E[\{u^2(t)\}] \\
&= E[\{A[1 + m s(t)] \cos(2\pi f_c t)\}^2] \\
&= A^2 E[\cos^2(2\pi f_c t) + 2m s(t) \cos^2(2\pi f_c t) + m^2 s^2(t) \cos^2(2\pi f_c t)] \\
&= A^2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2m}{2} E[s(t)] + \frac{m^2}{2} E[s^2(t)] \right\} \quad (7-7)
\end{aligned}$$

◆ 信号が(7-2)式するとき、第2項は0になるので、

$$P_{AM} = A^2 \left\{ \frac{1}{2} + 0 + \frac{m^2}{4} \right\} = \left(\frac{A}{\sqrt{2}} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{m^2}{2} \right\} \quad (7-8)$$

◆ 側波帯電力は全電力の1/3まで。

上・下側帯波の電力

搬送波の電力

目次

1. 搬送波と変調
2. 振幅変調
3. AM信号の生成と復調
4. 搬送波・側帯波の電力
5. 信号対雑音電力比
6. 両側波帯変調

- ◆ 線路で搬送波に重畳する雑音(第5講参照)を、同相成分(in phase)と直交成分(quadrature phase)の和で次式のように表す。

$$n(t) = n_i \cos(2\pi f_c t) - n_q \sin(2\pi f_c t) \quad (7-9)$$

- ◆ 復調器の前に帯域通過フィルタ(BPF)があり、雑音電力は帯域幅 B に制限されるとすると、

$$E[|n(t)|^2] = \frac{1}{2} E[|n_i(t)|^2] + \frac{1}{2} E[|n_q(t)|^2] = N_0 B \quad (7-10)$$

- ◆ 復調器への入力信号電力は(7-8)式であり、(7-10)式の雑音電力との比(SNR)は、

$$\gamma_1 = \frac{P_{AM}}{N_0 B} = \frac{\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right)^2 \left\{1 + \frac{m^2}{2}\right\}}{2f_m N_0} = \frac{A^2(2 + m^2)}{8f_m N_0} \quad (7-11)$$

- ◆ 搬送波を除去して片側の側波帯を考えると、

$$\gamma_2 = \frac{\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{m^2}{2}}{f_m N_0} = \frac{A^2 m^2}{4f_m N_0} = \frac{2m^2}{2 + m^2} \gamma_1 \quad (7-12)$$

上・下側帯波の電力

雑音電力

- ◆ $m = 1$ のとき、 γ_2 は γ_1 の **2/3** になる。もともと、(7-8)式で側波帯電力は全電力の **1/3** だったことを考えると、復調のSNRが**2倍に改善**された。
- ◆ (7-12)式の分子で、負の周波数である下側波帯は、正の周波数である上側波帯と同じ信号なので、加算された信号は**2倍**になる。
- ◆ (7-12)式の分母で、雑音電力はランダムであり、負側と正側に相関がないので、重なっても**2倍**にはならない。

◆ 復調器の入力 $y(t)$ は、信号と雑音の和で、

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) + n(t) \\ &= A[1 + m s(t)] \cos(2\pi f_c t) + n_i \cos(2\pi f_c t) - n_q \sin(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (7-13)$$

◆ 包絡線検波出力 $v(t)$ は $y(t)$ の振幅だから、

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{\{A[1 + m s(t)] + n_i(t)\}^2 + \{n_q(t)\}^2} \\ &= A[1 + m s(t)] \sqrt{\left\{1 + \frac{n_i(t)}{A[1 + m s(t)]}\right\}^2 + \left\{\frac{n_q(t)}{A[1 + m s(t)]}\right\}^2} \end{aligned} \quad (7-14)$$

- ◆ 雑音が小さいとき、雑音 n_i および n_q の2乗の項は相対的に無視できるとして、次のように近似できる。

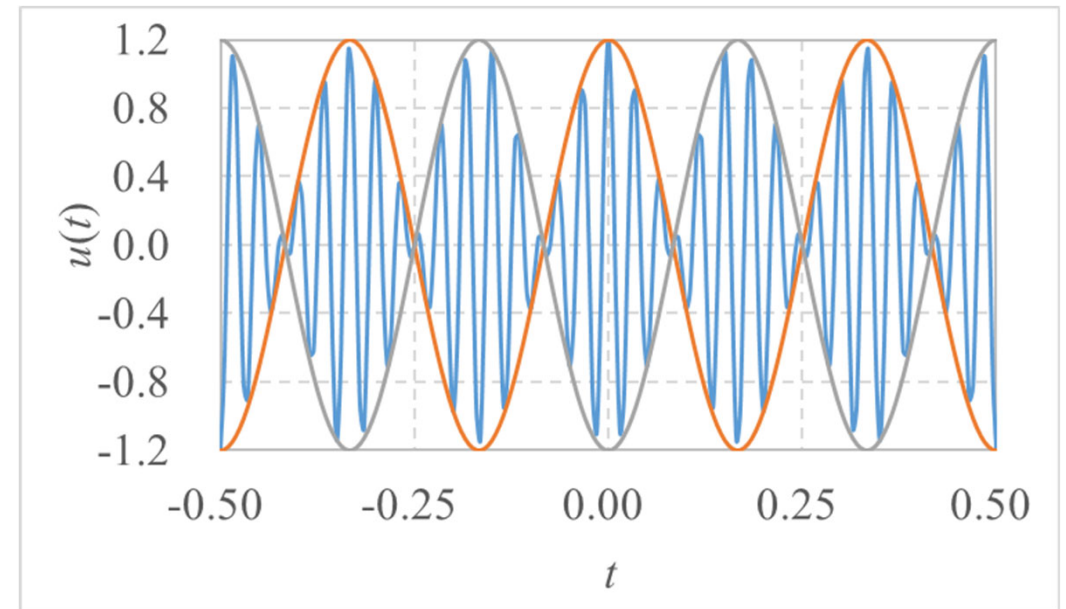
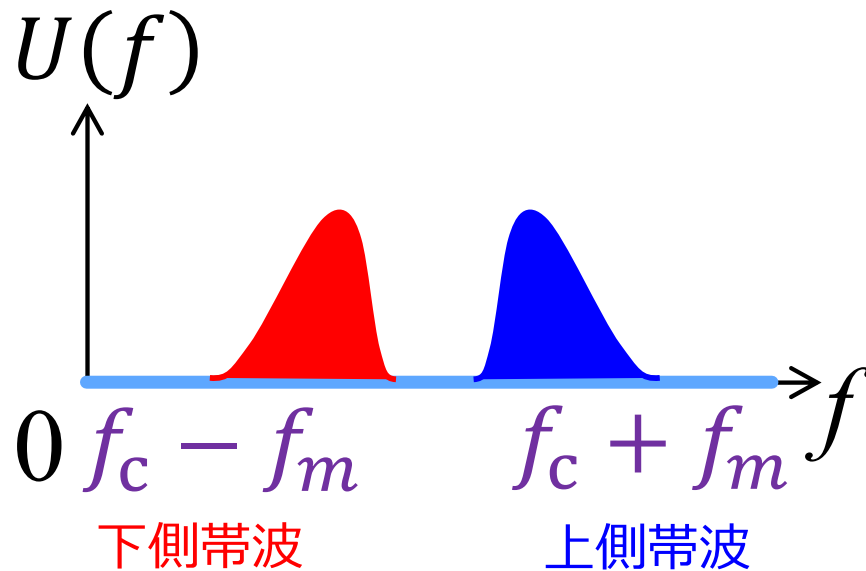
$$\begin{aligned}
 v(t) &\cong A[1 + m s(t)] \sqrt{1 + \frac{2n_i(t)}{A[1 + m s(t)]}} \\
 &\cong A[1 + m s(t)] \left\{ 1 + \frac{1}{2} \times \frac{2n_i(t)}{A[1 + m s(t)]} \right\} \\
 &= A[1 + m s(t)] + n_i(t) \qquad (7-15)
 \end{aligned}$$

- ◆ 包絡線検波したときに雑音が抽出され、SNRを悪化させることがわかる。

目次

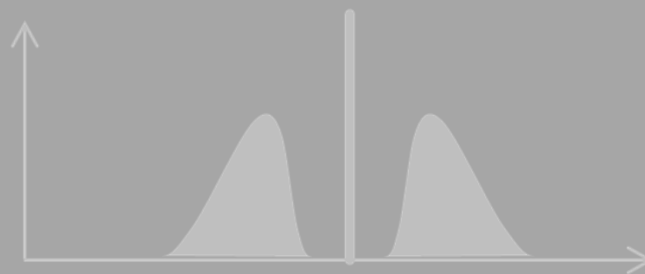
1. 搬送波と変調
2. 振幅変調
3. AM信号の生成と復調
4. 搬送波・側帯波の電力
5. 信号対雑音電力比
6. 両側波帯変調

- ◆ (7-11),(7-12)式で、復調器におけるSNRの劣化が $\gamma_2/\gamma_1 = 2/3$ であることを示した。これは、搬送波の影響である。搬送波を取り除いた、両側波帯変調 (double sideband with suppressed carrier, DSB-SC)で $\gamma_2/\gamma_1 = 2$ に改善できる。



- ◆ 搬送波は振幅 $A = 1$ かつ周波数 $f_c = 10 \text{ Hz}$ の \cos 波、ベースバンド信号は振幅 1 かつ周波数 $f_b = 10 \text{ Hz}$ の \cos 波、変調度 $m = 50\%$ のとき、AM 信号の外形を $t = [-0.5, 0.5]$ の範囲で描け。

Thank you.



伝送システム理論

Transmission system theory

第8講 位相変調と周波数変調

Lecture 8: Phase modulation and frequency modulation



古川 靖

埼玉工業大学 工学部 情報システム学科

目次

1. 位相変調と周波数変調
2. PM・FMのスペクトル
3. FM信号の生成と復調
4. 信号対雑音電力比

- ◆ 搬送波を次の式で表す。

$$u(t) = A \cos[2\pi f_c t + \varphi_d(t)] = A \cos[\varphi_c(t)] \quad (8-1)$$

ここで、 A は振幅、 f_c は周波数、 t は時刻、 $\varphi_d(t)$ は初期位相、 $\varphi_c(t)$ は位相である。

- ◆ 振幅 A 以外のパラメータも変調することができ、位相を変調する**位相変調**(phase modulation, PM)、周波数を変調する**周波数変調**(frequency modulation, FM)がある。これらを**角度変調**という。

◆搬送波を信号波で変調するキャリア変調★
のうち、位相角を変化させる方法と周波数
を変化させる方法は、総称して ①
といわれる。

選択肢：

- | | | |
|----------|----------|---------|
| 1. PAM変調 | 2. 角度変調 | 3. 直接変調 |
| 4. 振幅変調 | 5. SSB変調 | |

- ◆ 信号 $s(t)$ を用いて、位相 $\varphi_d(t)$ を変調するとき、

$$\varphi_d(t) = m s(t) \quad (8-2)$$

- ◆ ここで m は、位相変調における変調指数である。
 $\max|s(t)| = 1$ の場合、 m は最大位相偏移
(maximum phase deviation) である。
- ◆ (8-2)式を(8-1)式に代入すると、PM信号は次の式で表される。

$$u(t) = A \cos[2\pi f_c t + m s(t)] \quad (8-3)$$

- ◆ 位相 $\varphi_c(t)$ を時間微分したものを瞬時周波数 (instantaneous frequency) という。

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_c(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_d(t)}{dt} \quad (8-4)$$

- ◆ 位相変調しない場合、瞬時周波数は f_c である。信号 $s(t)$ を用いて、瞬時周波数 $f_i(t)$ を次のように変調する。

$$f_i(t) = f_c + \Delta f s(t) \quad (8-5)$$

- ◆ ここで、 Δf は最大周波数偏移である。

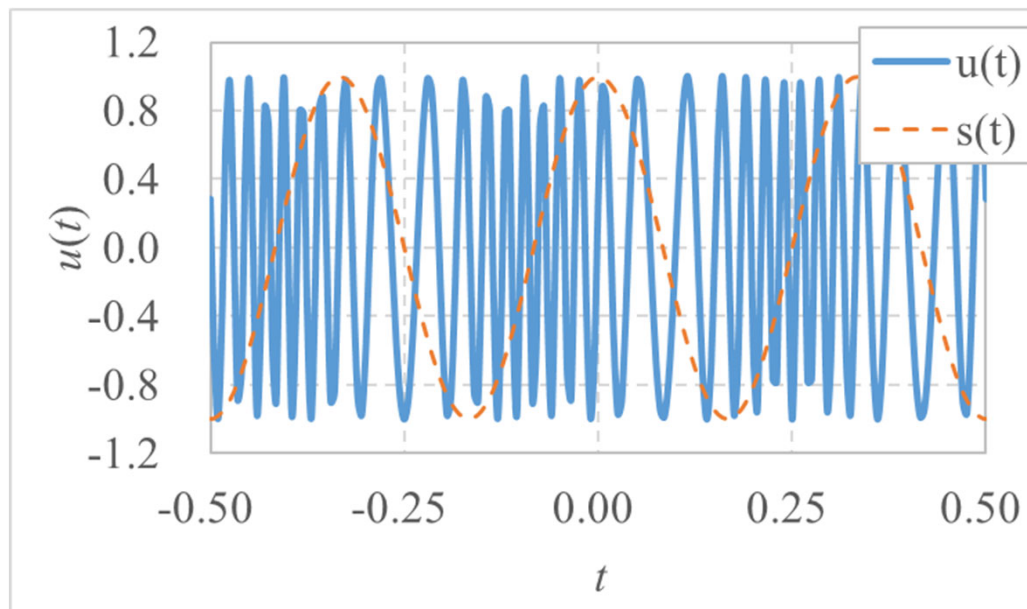
- ◆ 信号 $s(t)$ の帯域幅を f_m とすると、FMにおける変調指数は次の式で定義される。

$$m = \frac{\Delta f}{f_m} \quad (8-6)$$

- ◆ (8-4),(8-5)式を(8-1)式に代入すると、FM信号は次の式で表される。

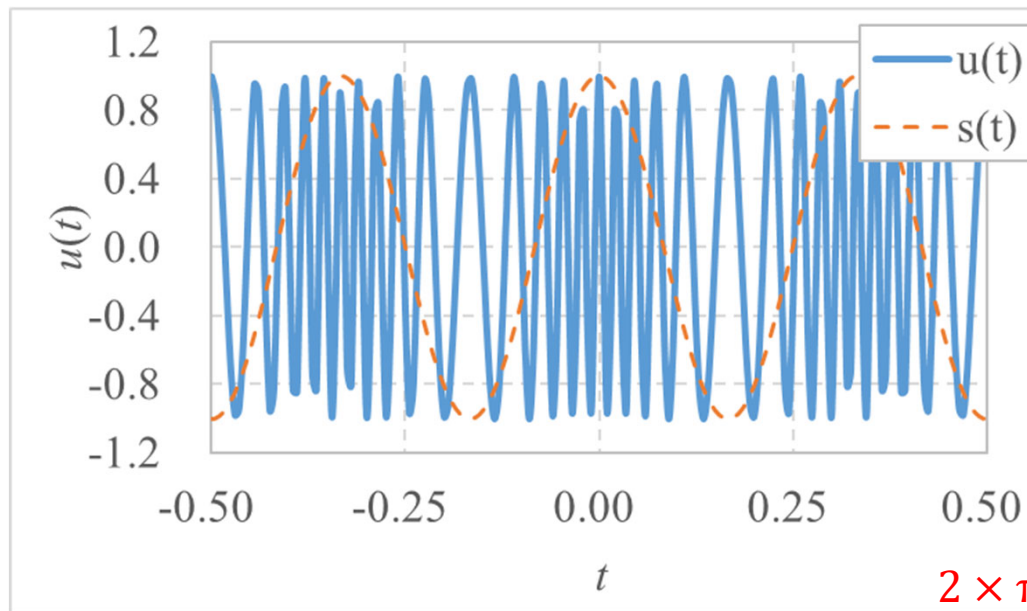
$$u(t) = A \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi \Delta f \int_0^t s(\tau) d\tau \right] \quad (8-7)$$

◆ 信号 $s(t)$ と PM信号 $u(t)$



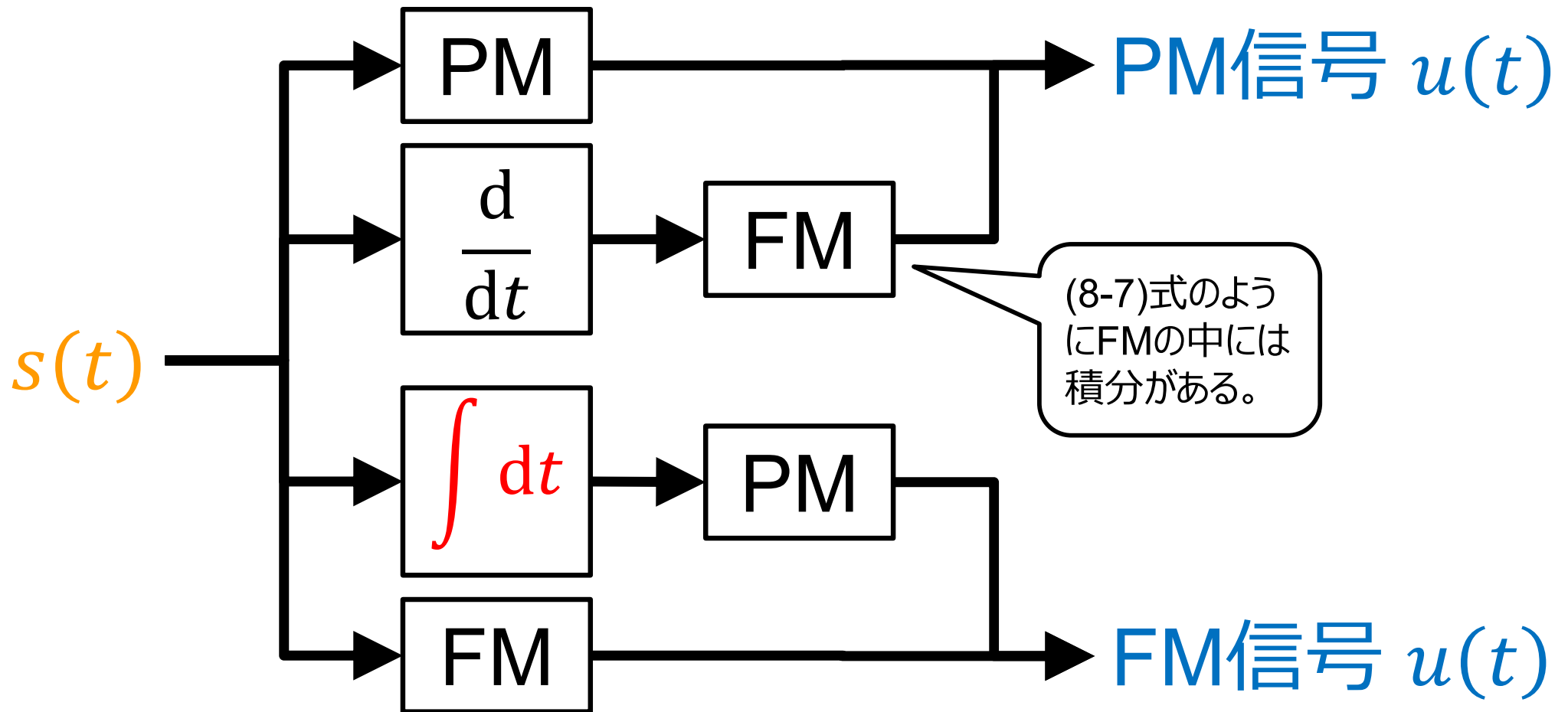
$A = 1$
 $f_c = 30$
 $f_m = 3$
 $m = 5$

◆ 信号 $s(t)$ と FM信号 $u(t)$



$A = 1$
 $f_c = 30$
 $f_m = 3$
 $m = 0.27$

$$2 \times \pi \times 0.27 \times 3 \approx 5$$



$$\varphi_d(t) = 2\pi\Delta f \int_0^t s(\tau) d\tau \text{ と考えれば、PMもFMも同じ。}$$

◆ AM信号は線形結合したときAM信号になる。

$$\begin{aligned} & A[1 + m s_1(t)] \cos(2\pi f_c t) + A[1 + m s_2(t)] \cos(2\pi f_c t) \\ &= A\{1 + m [s_1(t) + s_2(t)]\} \cos(2\pi f_c t) \quad (8-8) \end{aligned}$$

◆ PM・FM信号は線形性がなく、非線形変調 (nonlinear modulation) である。

$$\begin{aligned} & A \cos(2\pi f_c t + m s_1(t)) + A \cos(2\pi f_c t + m s_2(t)) \\ & \neq A \cos(2\pi f_c t + m [s_1(t) + s_2(t)]) \quad (8-9a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi\Delta f \int_0^t s_1(\tau) d\tau\right) + A \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi\Delta f \int_0^t s_2(\tau) d\tau\right) \\ & \neq A \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi\Delta f \int_0^t [s_1(\tau) + s_2(\tau)] d\tau\right) \quad (8-9b) \end{aligned}$$



- ◆ PM・FMが非線形変調であることを、下式が成り立たないことを示して証明せよ。

$$\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

目次

1. 位相変調と周波数変調
2. PM・FMのスペクトル
3. FM信号の生成と復調
4. 信号対雑音電力比

- ◆ ベースバンド信号を次の式で表す。

$$s(t) = \cos(2\pi f t) \quad (8-10)$$

- ◆ (8-3)式のPM信号と、(8-7)式のFM信号を、複素表現で表すと次のようになる。

$$u_{\text{PM}}(t) = A \operatorname{Re} \left[e^{jm \cos(2\pi f t)} e^{j2\pi f_c t} \right] \quad (8-11)$$

$$u_{\text{FM}}(t) = A \operatorname{Re} \left[e^{jm \sin(2\pi f t)} e^{j2\pi f_c t} \right] \quad (8-12)$$

- ◆ ヤコビ・アンガー展開により、変調信号を表す指数部分を、第1種ベッセル関数の無限級数に変形し、

$$e^{jm \cos(2\pi ft)} = \sum_{-\infty}^{\infty} (j)^n J_n(m) e^{j2\pi nft} \quad (8-13a)$$

$$e^{jm \sin(2\pi ft)} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(m) e^{j2\pi nft} \quad (8-13b)$$

を(8-11),(8-12)式に代入する。

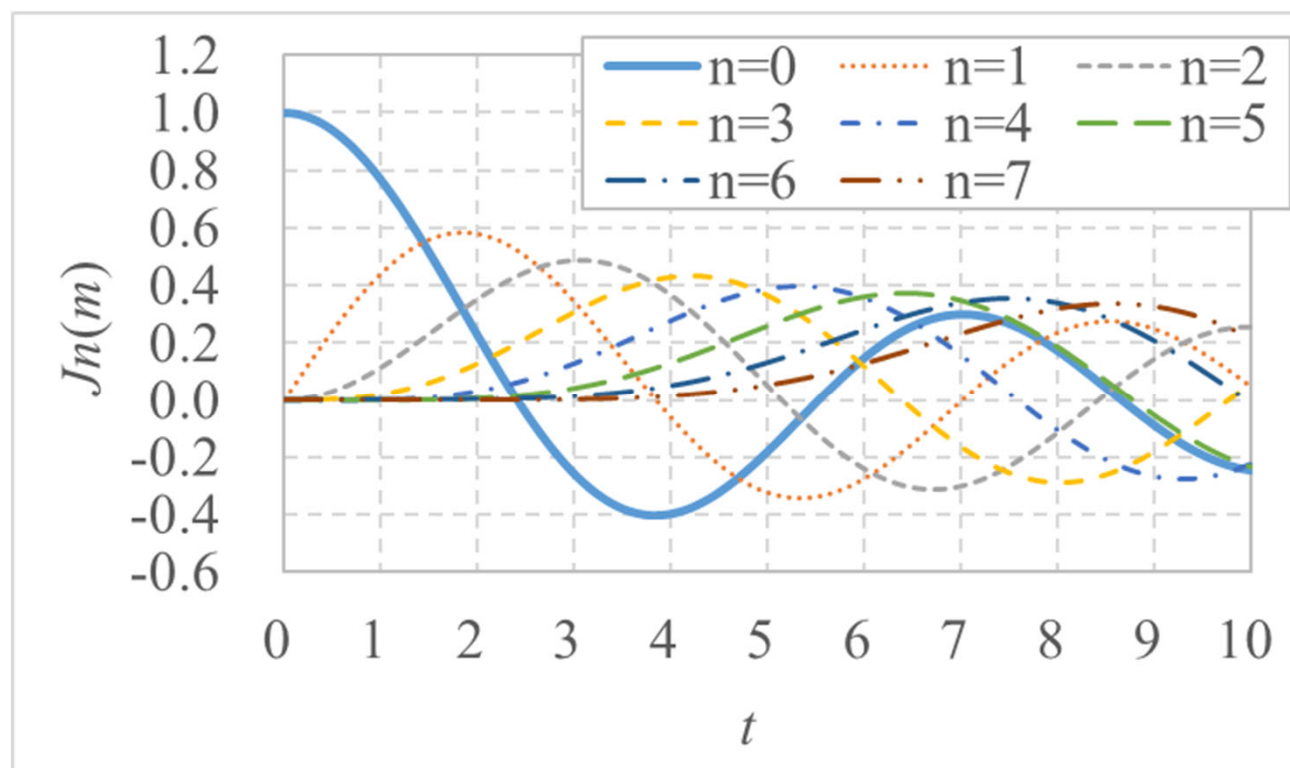
$$u_{\text{PM}}(t) = A \operatorname{Re} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} (j)^n J_n(m) e^{j2\pi n f t} e^{j2\pi f_c t} \right]$$
$$= A \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos \left[2\pi(f_c + n f)t + \frac{n\pi}{2} \right] \quad (8-14)$$

$$u_{\text{FM}}(t) = A \operatorname{Re} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(m) e^{j2\pi n f t} e^{j2\pi f_c t} \right]$$
$$= A \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(m) e^{j2\pi n f t} \cos[2\pi(f_c + n f)t] \quad (8-15)$$

◆ 第1種ベッセル関数には以下の性質がある。

次数 n が偶数の時： $J_n(m) = J_{-n}(m)$ (8-16a)

次数 n が奇数の時： $J_n(m) = -J_{-n}(m)$ (8-16b)



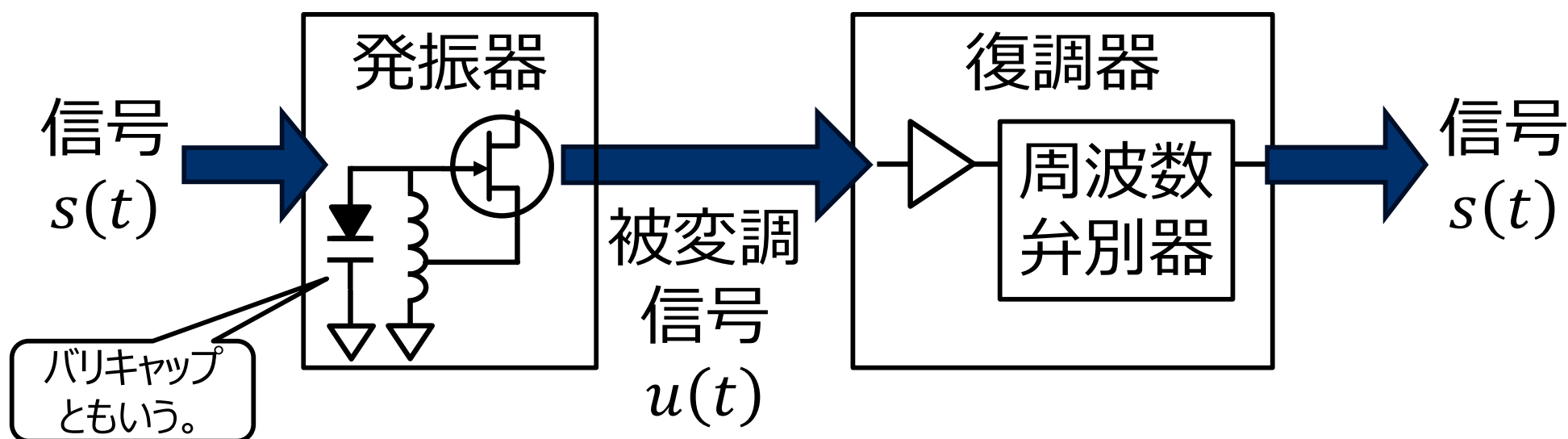
- ◆ (8-14), (8-15)式より、PM・FMのスペクトルは、周波数 f_c を中心として左右対称になり、周波数間隔 f ごとに無限に広がる。
- ◆ ただし、 n が大きくなると第1種ベッセル関数は小さくなり、 $n > m + 1$ の成分は無視してよい。
- ◆ よって、PM・FMの帯域幅 B は次式で表される。これをカーソン則 (Carson's rule) という。

$$B = 2(m + 1)f_m \quad (8-17)$$

目次

1. 位相変調と周波数変調
2. PM・FMのスペクトル
3. FM信号の生成と復調
4. 信号対雑音電力比

- ◆ LC発信回路に**可変容量ダイオード**(variable capacitance diode)を用い発信周波数を変える。
- ◆ 復調には**振幅制限器**(Limiting Amplifier)で増幅したあと、**周波数弁別器**で周波数変化を電圧変化として抽出する。



目次

1. 位相変調と周波数変調
2. PM・FMのスペクトル
3. FM信号の生成と復調
4. 信号対雑音電力比

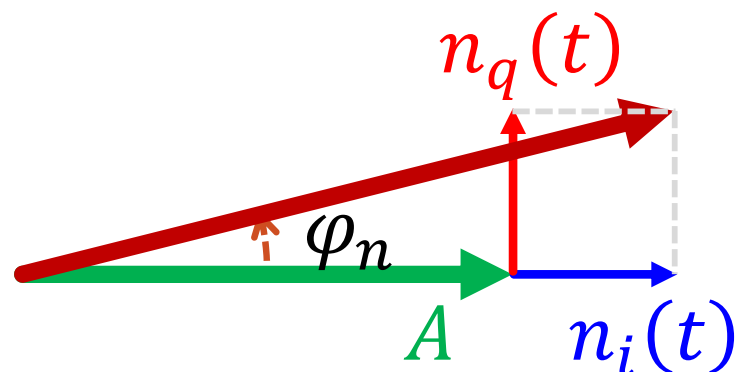
- ◆ 復調器への入力信号電力は(8-7)式であり、(7-10)式の雑音電力との比(SNR)は、

$$\gamma_1 = \frac{P_{\text{FM}}}{N_0 B} = \frac{\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right)^2}{N_0 B} = \frac{A^2}{2BN_0} \quad (8-18)$$

- ◆ (7-9)式に示した雑音は、FMの場合、次式のように表す。雑音の位相は $[0, 2\pi)$ で一様に分布しているので、統計的性質は変わらない。

$$n(t) = n_i(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_d(t)) - n_q(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_d(t)) \quad (8-19)$$

- ◆ 雑音の重畳したFM信号をフェーズで表すと、



$$\varphi_n(t) = \tan^{-1} \left[\frac{n_q(t)}{A + n_i(t)} \right] \quad (8-20)$$

- ◆ よって、受信信号の瞬時位相は次式で表せる。

$$\begin{aligned} \varphi_c(t) &= 2\pi f_c t + 2\pi\Delta f \int_0^t s(\tau) d\tau + \varphi_n(t) \\ &\approx 2\pi f_c t + 2\pi\Delta f \int_0^t s(\tau) d\tau + \frac{n_q(t)}{A} \quad (8-21) \end{aligned}$$

- ◆ 復調器の出力 $v(t)$ は f_c からの周波数偏移なので、位相を微分して、

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[2\pi\Delta f \int_0^t s(\tau) d\tau + \frac{n_q(t)}{A} \right] \\ &= \Delta f s(t) + \frac{1}{2\pi A} \frac{dn_q(t)}{dt} \end{aligned} \quad (8-22)$$

- ◆ 右辺第1項が信号成分であり、その電力は、

$$v_s(t) = (\Delta f)^2 E[|s(t)|^2] \quad (8-23)$$

- ◆ FMは周波数に信号がのるので、雑音も周波数空間で考える。(8-22)式の右边第2項が雑音であり、その周波数空間での電力は、

$$\begin{aligned}
 E[|n(t)|^2] &= E \left[\left| \frac{1}{2\pi A} \frac{dn_q(t)}{dt} \right|^2 \right] \\
 &= \frac{1}{(2\pi A)^2} \left| \int_{-f_m}^{f_m} (j2\pi f)^2 N_0 df \right|^2 \\
 &= \frac{4\pi^2 N_0}{(2\pi A)^2} \left| \frac{f_m^3 - (-f_m)^3}{3} \right|^2 = \frac{2N_0 f_m^3}{3A^2} \quad (8-24)
 \end{aligned}$$

時間微分
は(3-17)式
を参照。

- ◆ 復調器の出力信号電力は(8-23)式であり、(8-24)式の雑音電力との比(SNR)は、

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{(\Delta f)^2 E[|s(t)|^2]}{\frac{2N_0 f_m^3}{3A^2}} = \frac{3A^2 (\Delta f)^2 E[|s(t)|^2]}{2N_0 f_m^3} \\ &= \frac{3(\Delta f)^2 B}{f_m^3} E[|s(t)|^2] \gamma_1 \end{aligned} \quad (8-25)$$

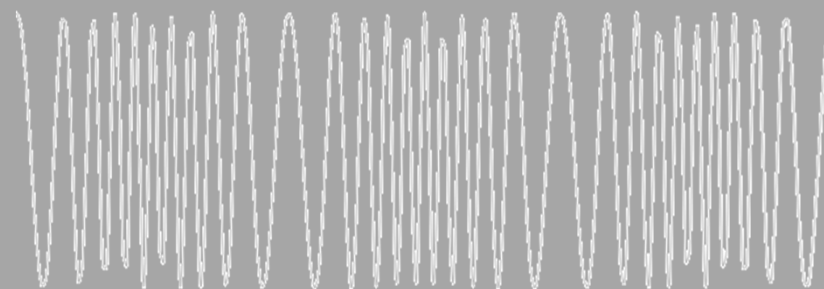
γ_1 は(8-18)式を参照。

- ◆ $s(t)$ を単一周波数正弦波とし、(8-17)式のカーソン則を適用すると、

$$\gamma_2 = \frac{3(\Delta f)^2 2(m+1)f_m}{2f_m^3} \gamma_1 = 3m^2(m+1)\gamma_1 \quad (8-26)$$

- ◆ 変調指数が大きくなると、SNRが大幅に改善される(利得がある)。周波数帯域を広げたことで得られたこの利得を、**広帯域化利得**という。

Thank you.



伝送システム理論

Transmission system theory

第9講 標本化と量子化

Lecture 9: Sampling and quantization



古川 靖

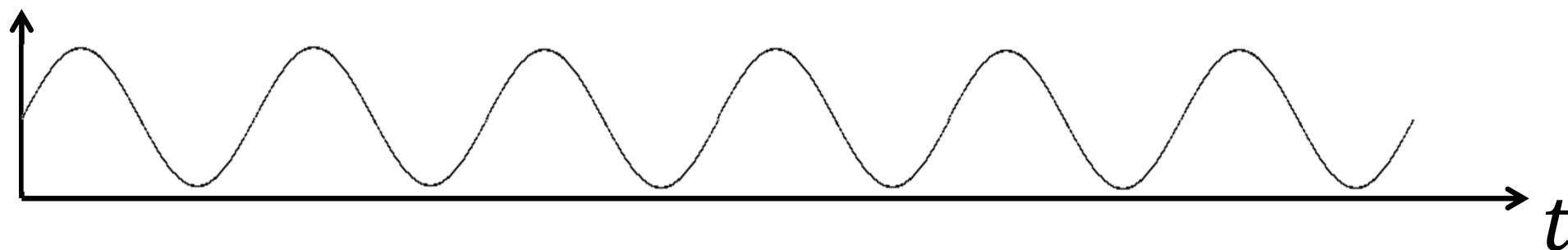
埼玉工業大学 工学部 情報システム学科

目次

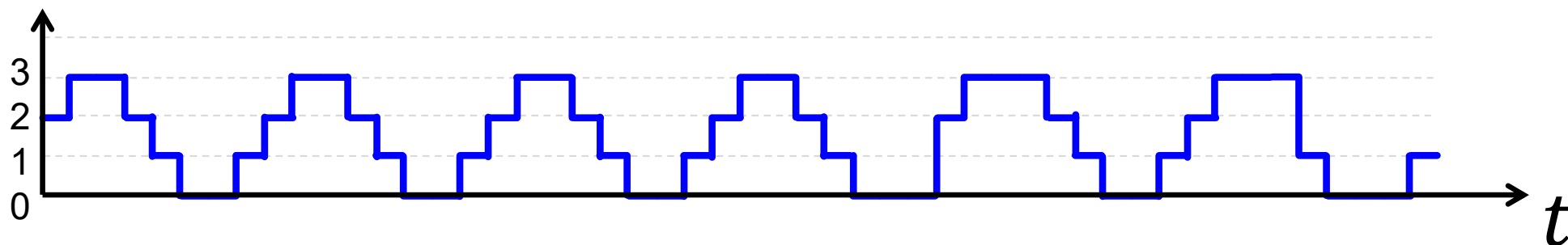
1. AD変換
2. 標本化
3. 量子化
4. 符号化

本講は
3年後期 専門選択科目
「計測工学」
の一部と重複するが、
理論を重点的に説明する。

- ◆ アナログ信号とは、連続する時間波形のことである。代表的なアナログ信号は、正弦波である。



- ◆ デジタル信号とは、離散的な数値が離散的な時刻に並ぶ時間波形のことである。

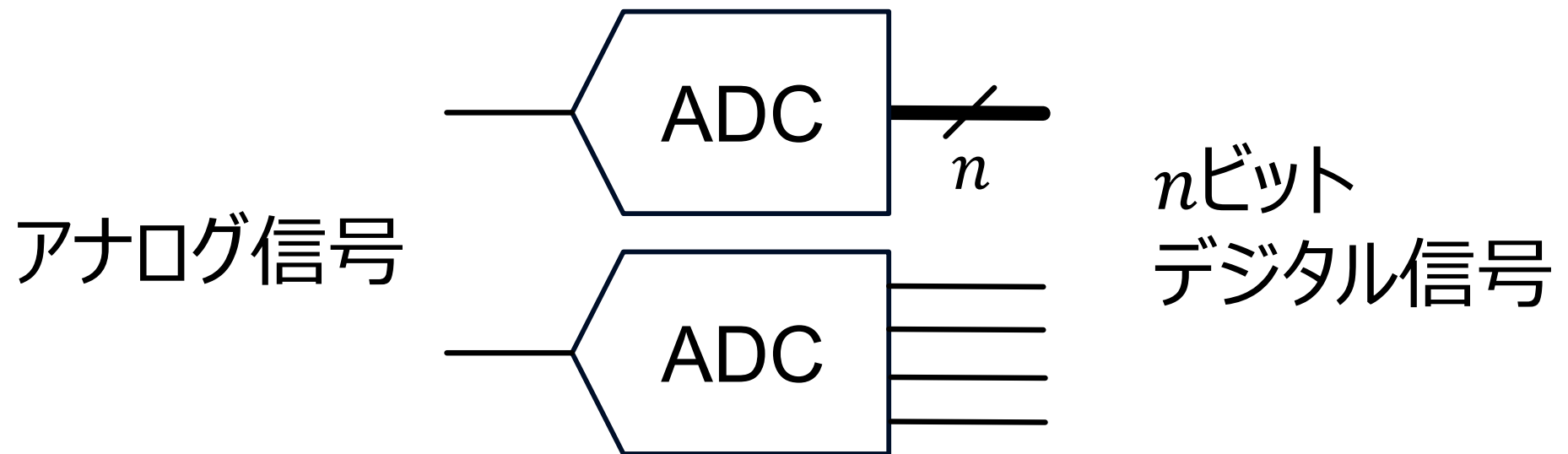


- ◆ アナログ信号をデジタル信号に変換することを、**アナログ-デジタル変換**(Analog-to-Digital Conversion, ADC, A-D変換, A/D変換)という。
- ◆ デジタル信号をアナログ信号に変換することを、**デジタル-アナログ変換**(Digital-to-Analog Conversion, DAC, D-A変換, D/A変換)という。
- ◆ Aはアナログ(Analog)、Dはデジタル(Digital)を表す。

- ◆ AD変換は、3つの手順で行われる。



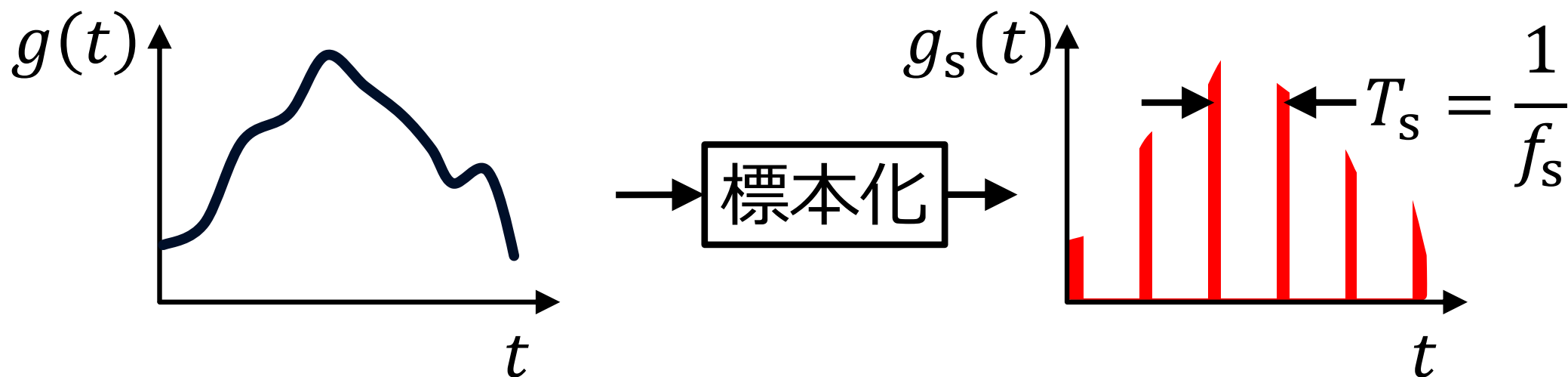
- ◆ ブロック図におけるADCの記号は下図を用いる。



目次

1. AD変換
2. 標本化
3. 量子化
4. 符号化

- ◆ 連続するアナログ信号から、適当な時間毎に値を抽出することを、**標本化** (sampling) という。抽出された信号のことを標本 (sample) という。



- ◆ 上の図では、 $g(t)$ を標本化したものを、 $g_s(t)$ としている。

- ◆ $g_s(t)$ を式で表すと、 $g(t)$ にデルタ関数をかける形になる。

$$g_s(t) = g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (9-1)$$

- ◆ $\delta(\quad)$ は (\quad) 内が0のときに1、それ以外は0になるので、 $g_s(t)$ は離散的な値になる。ただし、デジタル信号では $t = nT_s$ での値だけを使う。

$$g_s(t) = \begin{cases} g(nT_s), & t = nT_s \\ 0, & t \neq nT_s \end{cases} \quad (9-2)$$

- ◆ (9-1)式で用いたデルタ関数部分 $s(t)$ を次式で表すことにする。

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (9-3)$$

- ◆ これは、周期 T_s の周期関数だから、フーリエ級数展開(第2講参照)できる。フーリエ係数は、

$$c_n = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-j2\pi n f_s t} dt = \frac{1}{T_s} \quad (9-4)$$

- ◆ (9-4)式より、 $s(t)$ のフーリエ級数展開は次式になる。

$$s(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n f_s t} \quad (9-5)$$

- ◆ (9-1)式を書き直すと、

$$g_s(t) = g(t)s(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t)e^{j2\pi n f_s t} \quad (9-6)$$

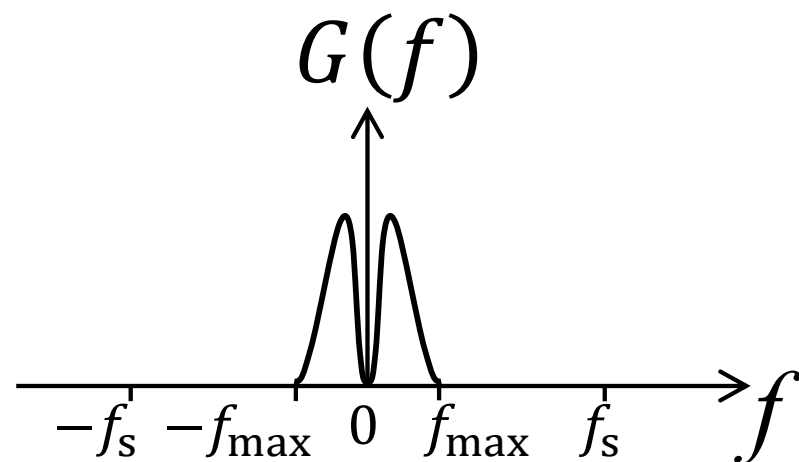
- ◆ 標本化した信号 $g_s(t)$ のフーリエ変換 $G_s(f)$ は、

$$\begin{aligned} G_s(f) &= \mathcal{F}[g_s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g_s(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi(f - n f_s)t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f - n f_s) \end{aligned} \quad (9-7)$$

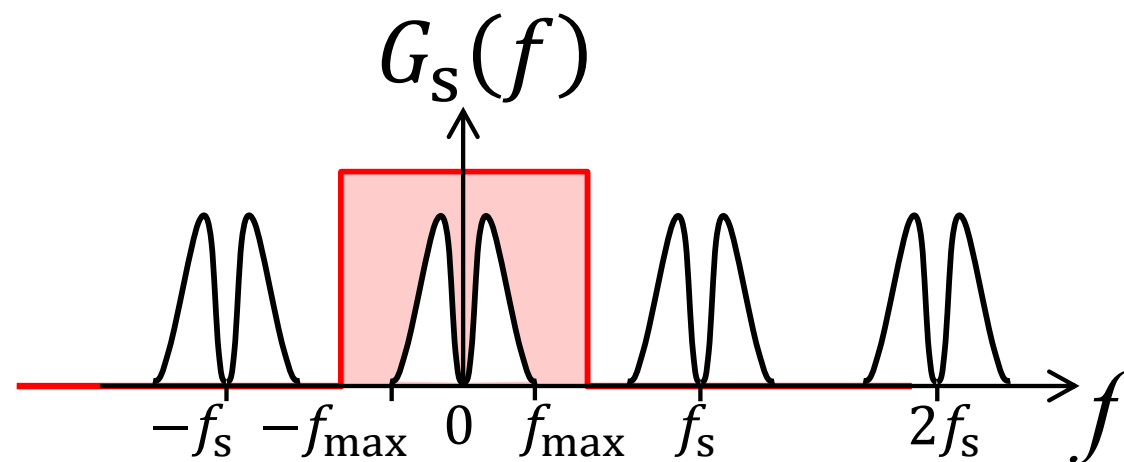
- ◆ アナログ信号 $g(t)$ のフーリエ変換スペクトル $G(f)$ を $f_s = 1/T_s$ 間隔で並べたものになる。

- ◆ アナログ信号 $g(t)$ の最大周波数を f_{\max} とすると、 $f_{\max} \leq f_s/2$ のとき、下図のスペクトルになる。

標本化前



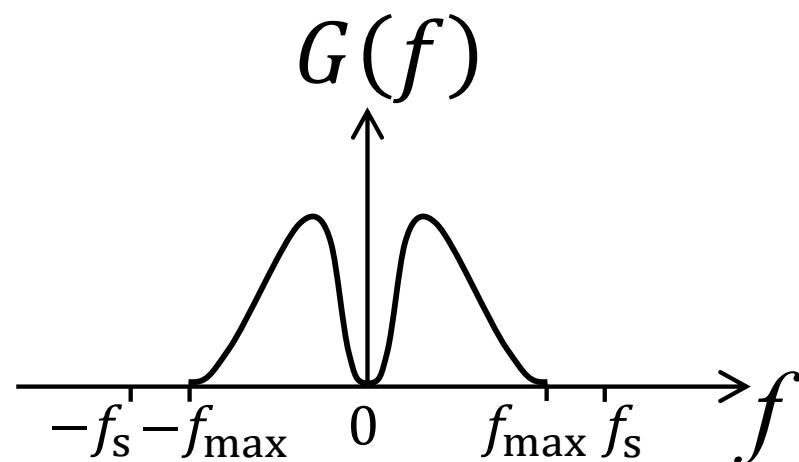
標本化後



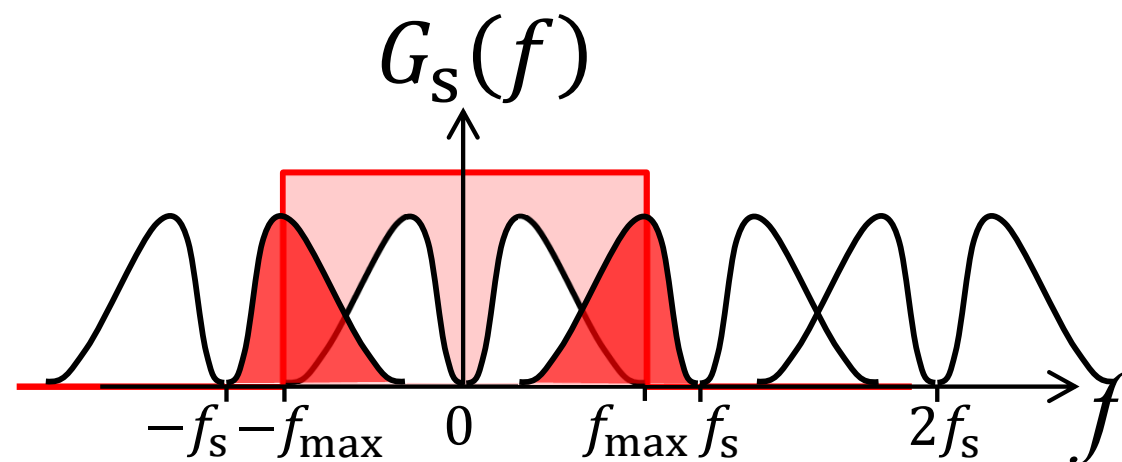
- ◆ LPF (第4講参照) で必要な周波数帯域だけを抽出すれば、元のスペクトルが得られる。

- ◆ $f_{\max} > f_s/2$ のとき、下図のスペクトルになる。

標本化前



標本化後



- ◆ 隣接する信号成分 $f_s - f_{\max}$ がLPF帯域内の信号成分と重なってしまい、元のスペクトルを抽出できない。**エイリアス**(aliasing)現象という。

- ◆ $f_{\max} \leq f_s/2$ のとき、標本化した信号 $g_s(t)$ から元のスペクトル $G(f)$ が得られる。つまり、標本化によってデータ量を減らしても、元の信号 $g(t)$ を再現できる。

(より少ない通信路容量で伝送できる。)

- ◆ $f_{\max} > f_s/2$ のとき、標本化した信号 $g_s(t)$ から元のスペクトル $G(f)$ は得られない。すなわち、標本化したデータから元の信号 $g(t)$ を再現できない。

- ◆ 標本化周波数 f_s は、アナログ信号の最大周波数 f_{\max} の2倍以上でなければならない。これを、**ナイキストの標本化定理** (Nyquist sampling theorem) という。2倍未満ではエイリアスが発生し、正しい波形を得られない。
- ◆ 標本化間隔が一定ではない不等間隔サンプリング (Non-uniform sampling) においても、平均サンプリングレートはナイキストのサンプリング定理を満たす。

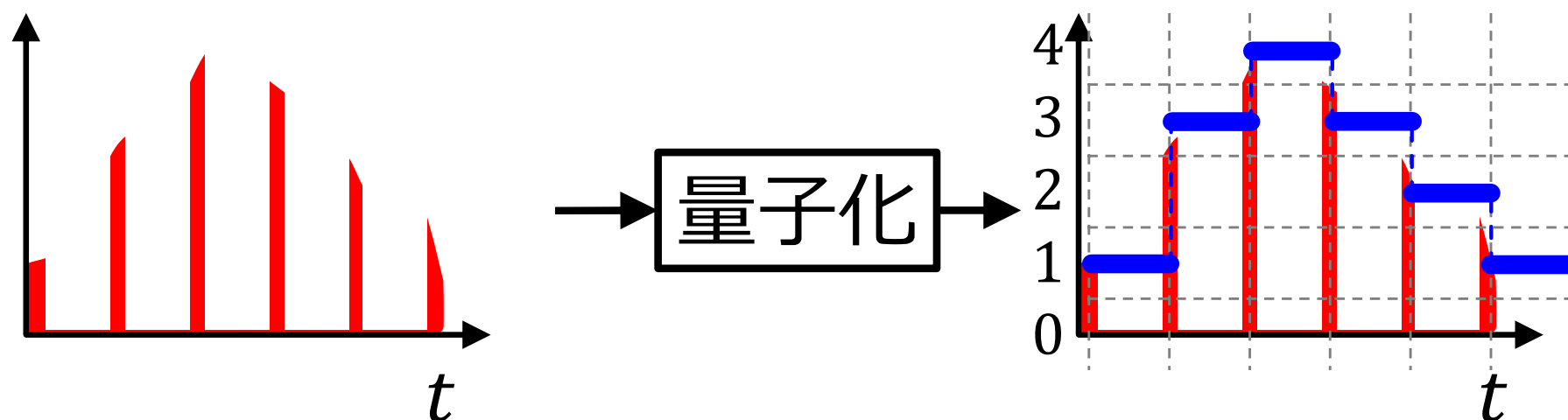


- ◆ 周波数10 kHzの正弦波を標本化するとき、サンプリング周波数 f_s は最低何kHz必要か？
また、標本化の周期 T_s はいくつ以下か？

目次

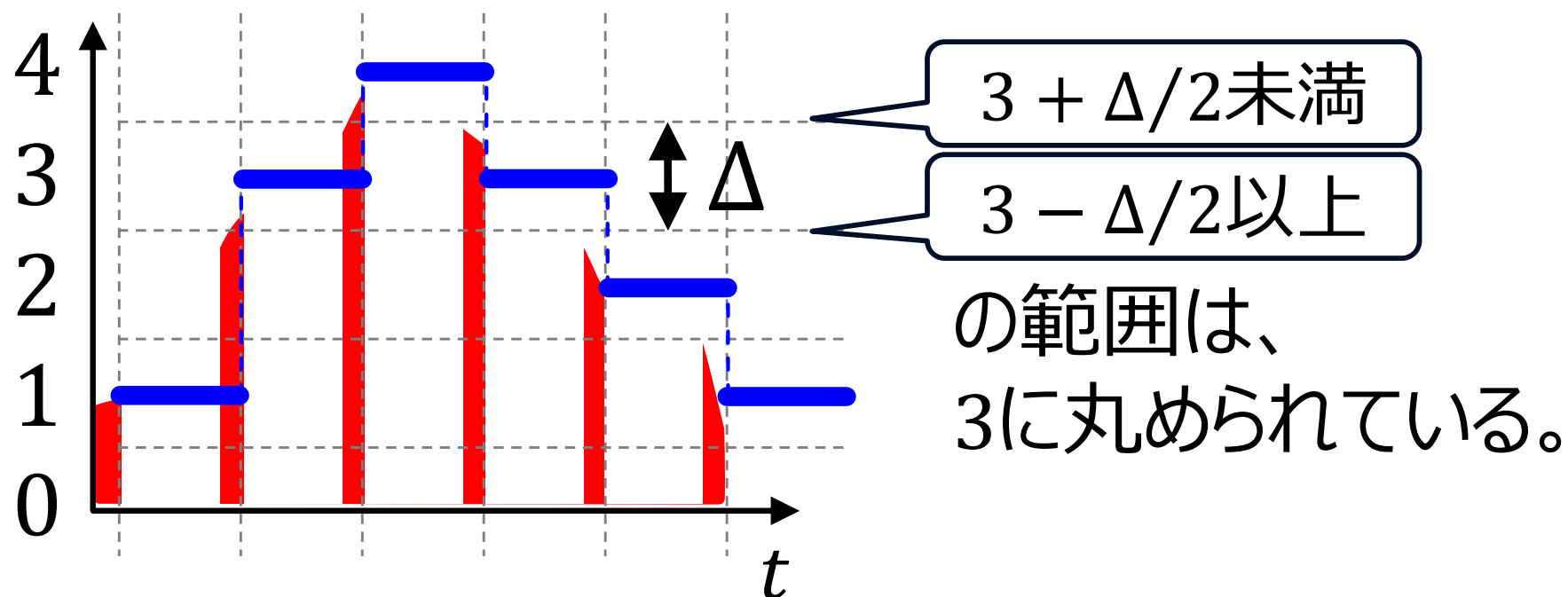
1. AD変換
2. 標本化
3. 量子化
4. 符号化

- ◆ 標本値は時間的に飛び飛びだが、縦軸は任意の数値になりうる。同様に、縦軸も飛び飛びの代表的な数値へと置き換えることを量子化 (quantization) という。



- ◆ 離散化された低精度数値への変換が量子化。

- ◆ 量子化されて、基準となる最小幅 Δ の整数倍に変換された数値は、元の数値に比べて最大 $\pm \Delta/2$ の誤差を生じる。これを**量子化誤差** (quantization error) という。



- ◆ 入力信号を $g(t)$ 、量子化された信号を $g_q(t)$ とすると、量子化する関数 $q(x)$ を次式のように表せる。

$$g_q(t) = q[g(t)] \quad (9-5)$$

$$q(x) = \text{sgn}(x) \left(\Delta \left\lfloor \frac{|x|}{\Delta} \right\rfloor + \frac{\Delta}{2} \right) \quad (9-6)$$

$$q[g(t)] - \frac{\Delta}{2} \leq g(t) < q[g(t)] + \frac{\Delta}{2} \quad (9-7)$$

$\text{sgn}(x)$ は符号を、 $\lfloor d \rfloor$ は d 以下の最大の整数を返す。

- ◆ 標本化した信号からは元の信号を再現できる。一方、量子化した信号には量子化誤差があり元の信号を再現できない。量子化誤差により生じる雑音を、**量子化雑音** (quantization noise) という。これを $\varepsilon(t)$ で表すと、

$$\varepsilon(t) = g(t) - g_q(t) \quad (9-8)$$

$$|\varepsilon(t)| \leq \frac{\Delta}{2} \quad (9-9)$$

- ◆ $\varepsilon(t)$ が一様分布の場合、雑音の分散は次式で与えられる。

$$\frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \varepsilon^2(t) d\varepsilon = \frac{\Delta^2}{12} \quad (9-10)$$

- ◆ 量子化ステップ数を $n_L = 2^n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) で表すとき、 $-2^{n-1}\Delta \leq g(t) < 2^{n-1}\Delta$ の値を扱える。
 $g(t)$ が一様分布だとすると、その分散は次式となる。

$$\frac{1}{2^n \Delta} \int_{-2^{n-1}\Delta}^{2^{n-1}\Delta} g^2(t) dg = \frac{2^{2n} \Delta^2}{12} \quad (9-10)$$

- ◆ よって、SNRは次式となる。

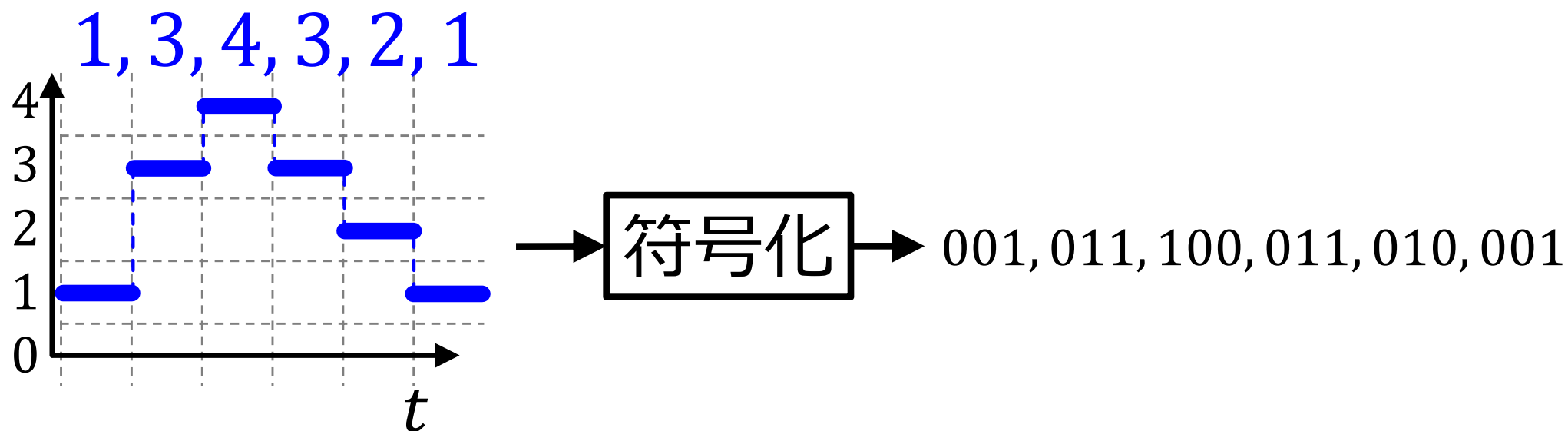
$$\gamma = \frac{2^{2n} \Delta^2 / 12}{\Delta^2 / 12} = 2^{2n} \quad (9-11)$$

- ◆ $10 \log_{10} 2^{2n} \cong 6n$ だから、1 bit増で6 dB改善する。

目次

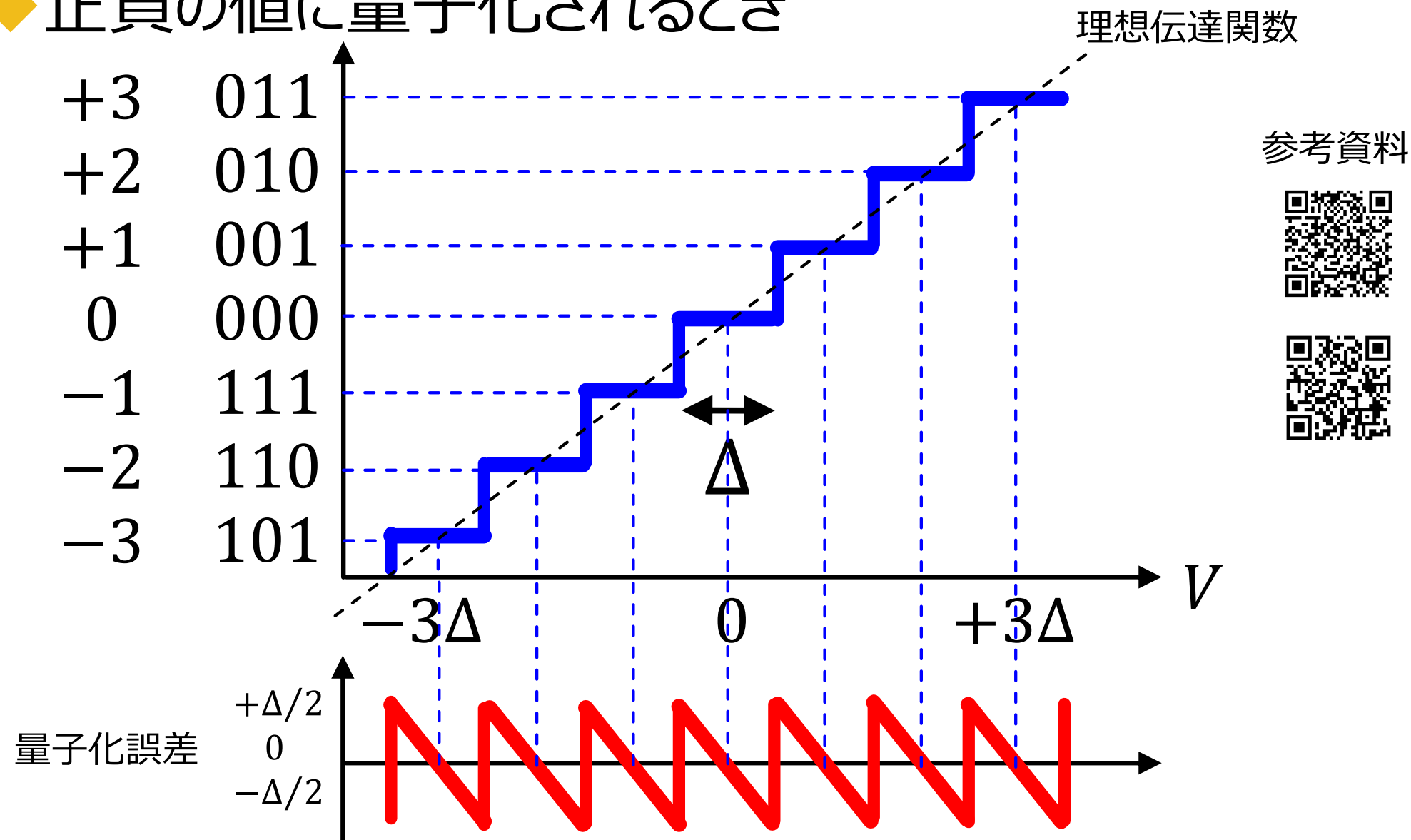
1. AD変換
2. 標本化
3. 量子化
4. 符号化

- ◆ 量子化によって丸めた数値を、 n ビットの2進数に変換することを**符号化** (encoding) という。



- ◆ 符号化された数値が、計測機器内のコンピュータ等で計算 (信号処理) に用いられる。

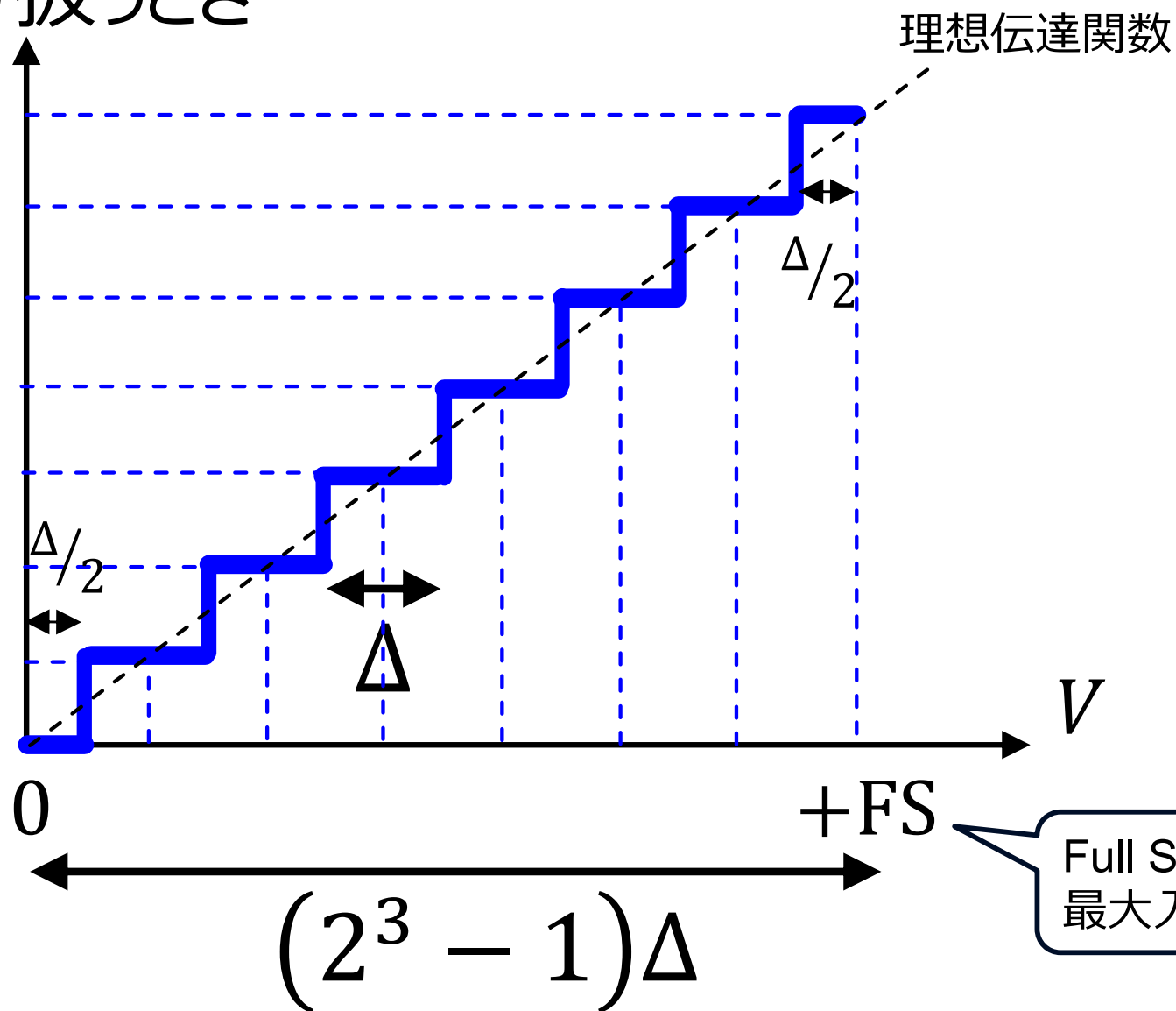
◆ 正負の値に量子化されるとき





◆ 正の値だけ扱うとき

+7	111
+6	110
+5	101
+4	100
+3	011
+2	010
+1	001
0	000



- ◆ 10ビットAD変換器は0から $(2^{10} - 1)$ までの数値を表現できる。このAD変換器で、0～10 Vの電圧を標本化するとき、10 Vがちょうど $(2^{10} - 1)$ に相当するとして、量子化誤差 Δ を計算せよ。



Thank you.



伝送システム理論

Transmission system theory

第10講 パルス符号変調

Lecture 10: Pulse code modulation



古川 靖

埼玉工業大学 工学部 情報システム学科

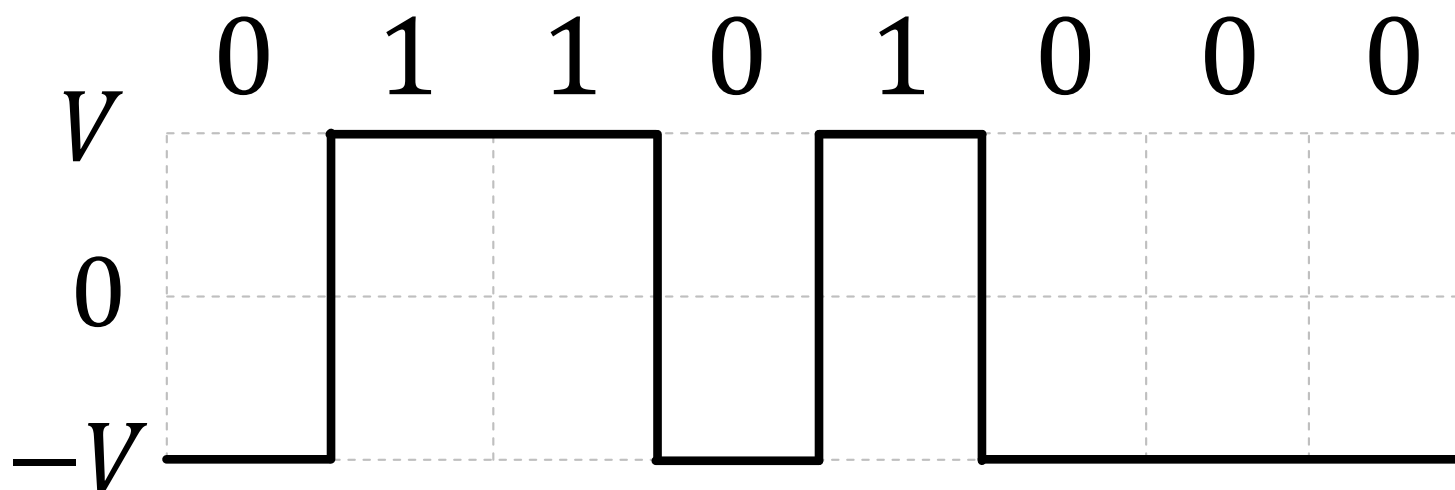
目次

1. 伝送路符号
2. 多値パルス変調
3. 線形予測符号化
4. パルス整形フィルタ

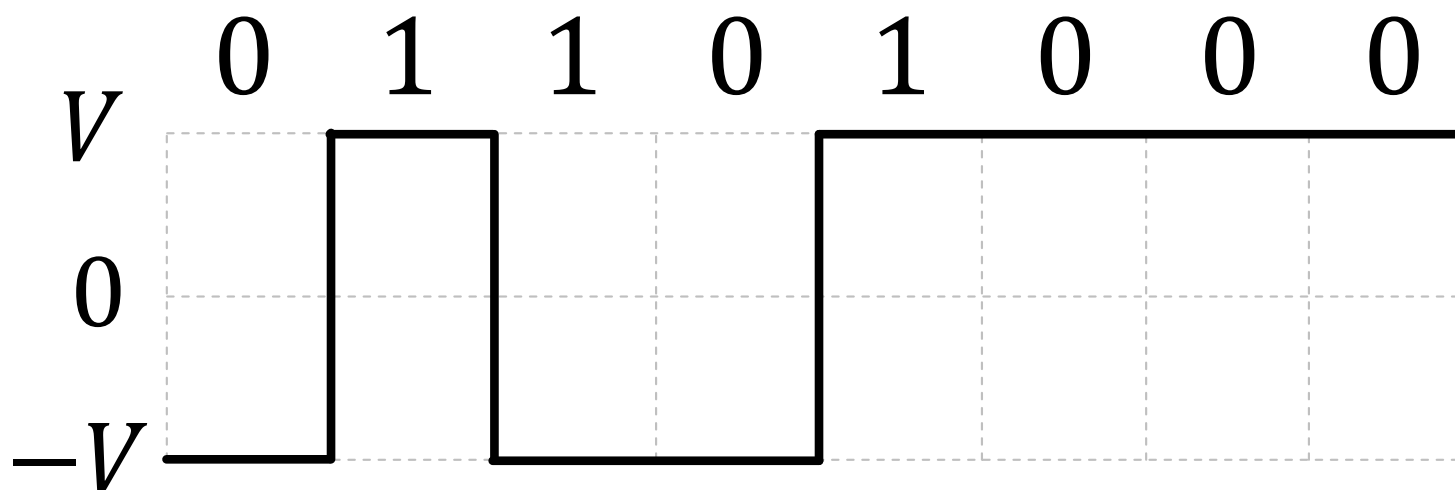
- ◆ 第9講にて、標本化・量子化・符号化により、0と1の2元符号からなる n ビットの2進数に変換する方法を示した。
- ◆ 2元符号列をパルス波形に変換する方式を、**パルス符号変調**(**p**ulse **c**ode **m**odulation, PCM)という。
- ◆ PCMは直流付近のベースバンド帯域で伝送されるため、**ベースバンド伝送**という。

- ◆ PCMのパルス波形にすることを符号化という。様々な符号化方式があり、それらを**伝送路符号**(line codes)という。
- ◆ 代表的な伝送路符号として、
 - ◆ Non-Return-to-Zero (NRZ)符号
 - ◆ Return-to-Zero (RZ)符号がある。

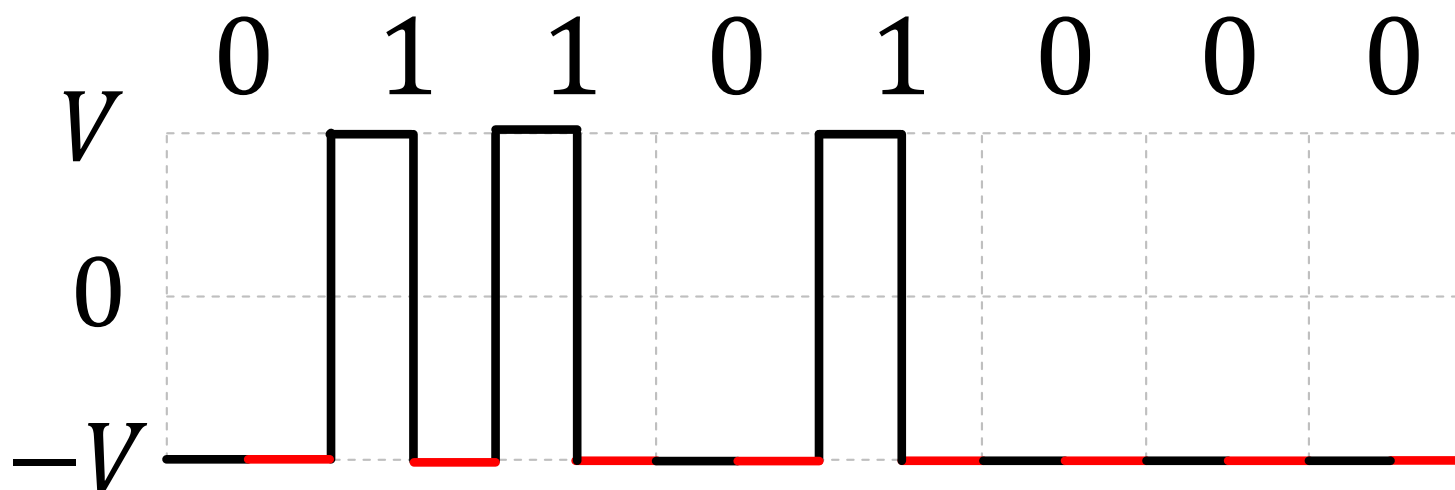
- ◆ NRZ-level (NRZ-L)符号は、0を低電圧レベル、1を高電圧レベルで表す。低電圧側を $-V$ ではなく0とするときは、On-Off Keyingともいう。
- ◆ 0または1の符号が変化するビット境界以外では、伝送する電圧レベルは変化しない。



- ◆ NRZ-mark (NRZ-M)符号は、符号1(という記号, マーク)の出現により電圧レベルが変化し、符号0の出現では電圧レベルが変化しない。これを**差動符号化**(differential encoding)という。
 - ※ 符号0でのみ変化するものはNRZ-space (NRZ-S)という。

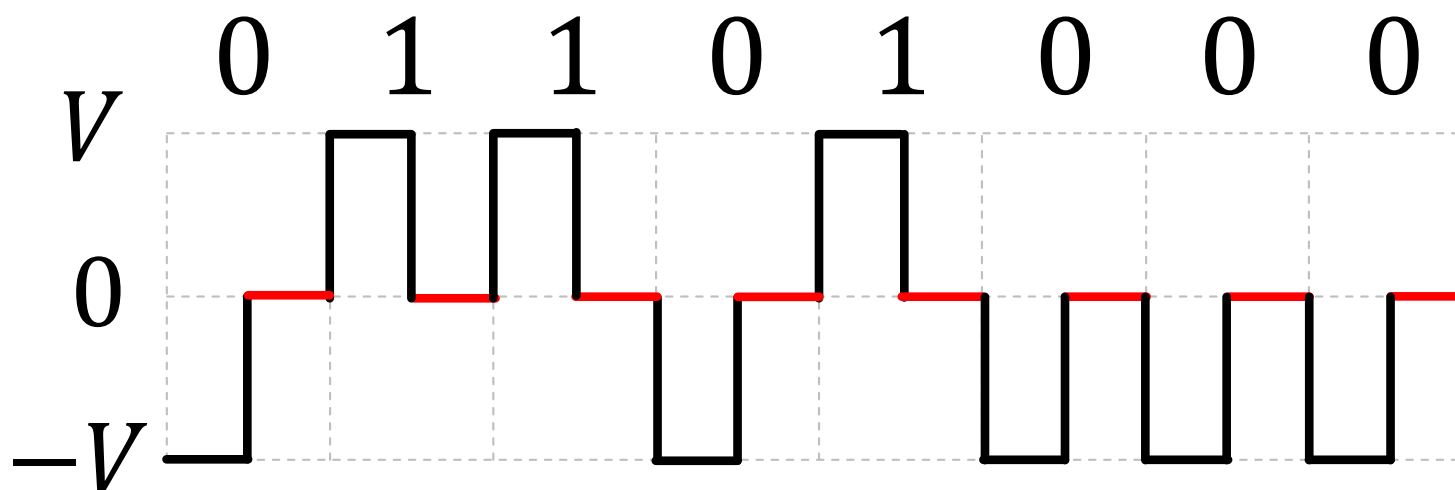


- ◆ 単極(Unipolar)RZ符号は、1ビット幅の前半で符号を1つ送り、1ビット幅の後半で符号0へ遷移する。後半は休止状態である。
- ◆ NRZに比べ、2倍の周波数帯域が必要になる。

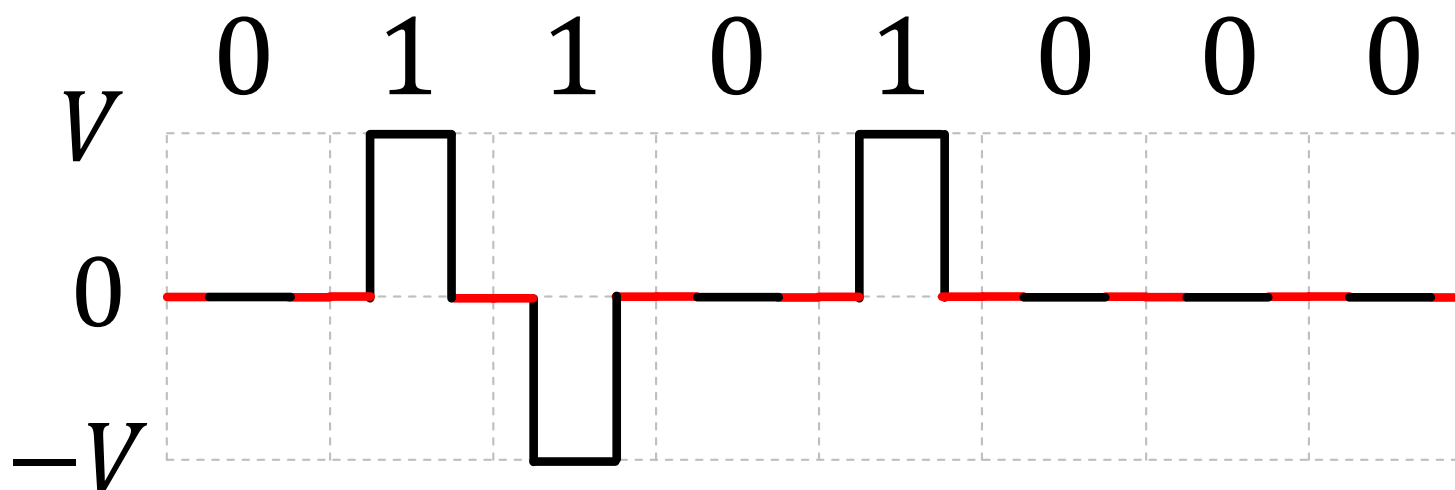


- ◆ NRZ符号は、ずっと同じ符号が続くと電圧が変化しない直流になってしまう。単極RZでも、ずっと0が続くと電圧が0のままになり直流になる。
直流の信号では、ビットの境界がわからない。
- ◆ 送信側と受信側は信号を伝送するタイミングを合わせるクロック同期をする必要があるが、ビット境界が見つからないと同期できなくなり、伝送エラーを生じるようになる。
- ◆ 同じ符号が続かない伝送路符号が必要。

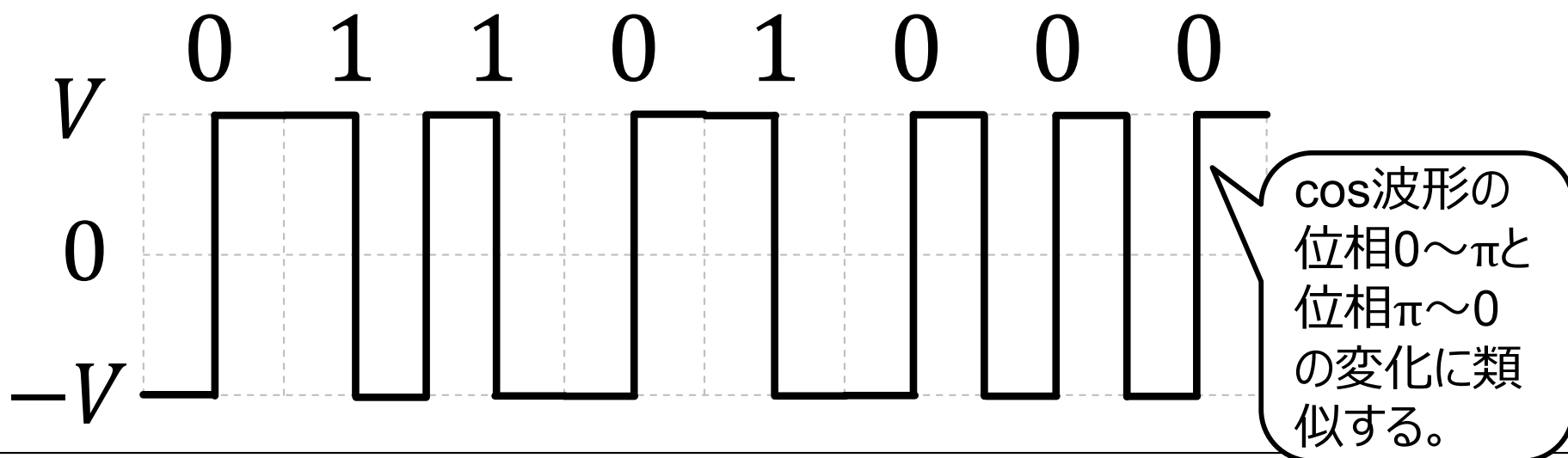
- ◆ 双極(Bipolar)RZ符号は、1ビット幅の前半で符号を $\pm V$ で送り、1ビット幅の後半で電圧0へ遷移する。符号とは異なる休止状態を用いる。
- ◆ 電圧変化のエッジによりクロック同期が可能で、直流成分も発生しにくい。



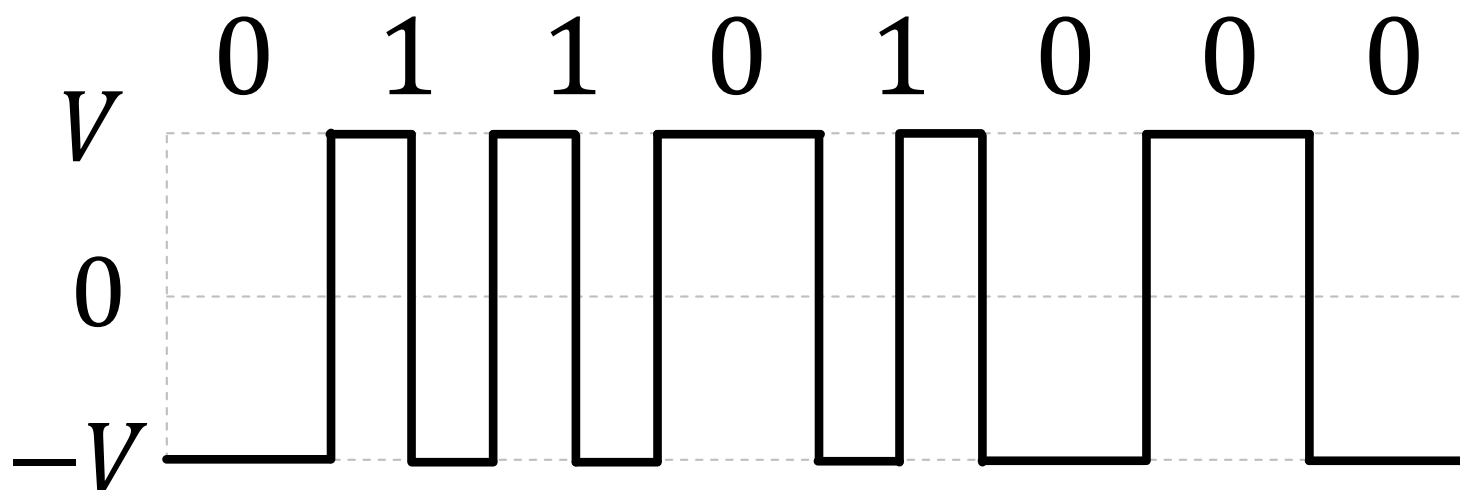
- ◆ RZ-alternate mark inversion (RZ-AMI)符号は、符号0では変化せず、符号1では半ビット幅の $\pm V$ を交互に送る、双極RZの1種。
- ◆ 直流成分がほとんど発生しないが、符号0がずっと続くとクロック同期できなくなる。



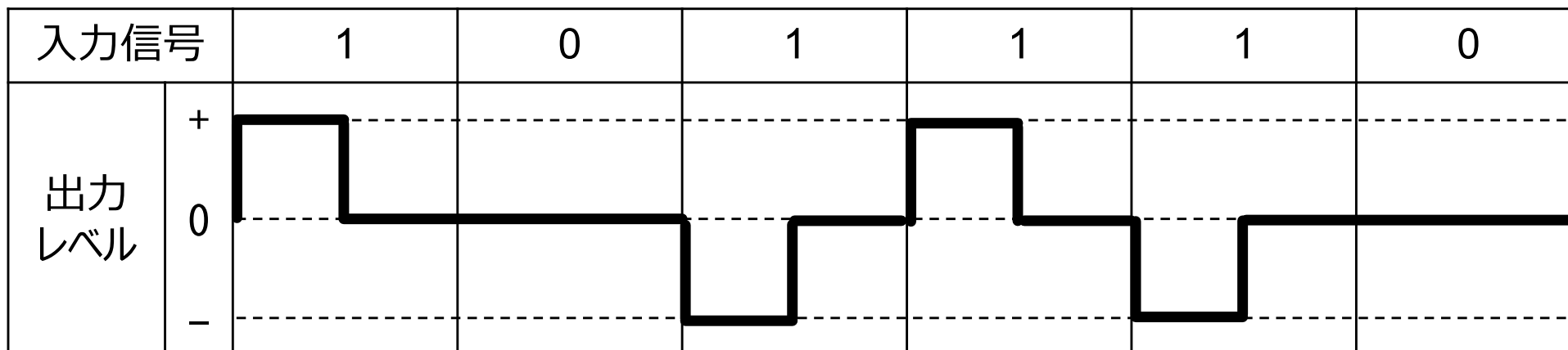
- ◆ バイフェーズ・レベル (Biphase-level)符号は、符号1のとき $+V$ から $-V$ へ、符号0のとき $-V$ から $+V$ へ遷移する。マンチェスター符号化 (Manchester coding)としても知られる。
- ◆ 符号0,1のいずれも直流を生じず、同期も可。



- ◆ バイフェーズ・マーク (Biphase-mark)符号は、1ビット幅の先頭で電圧反転し、符号1のときは1ビット幅の中央で再び電圧反転する。
- ◆ 符号0,1のいずれも直流を生じず、同期も可。
- ◆ Biphase-Mは配線を逆接続しても動作する。



◆ デジタル信号を送受信するための伝送路
 符号化方式において、入力信号と出力レ
 ベルが図に示す関係となるものは ①
 符号である。



選択肢：

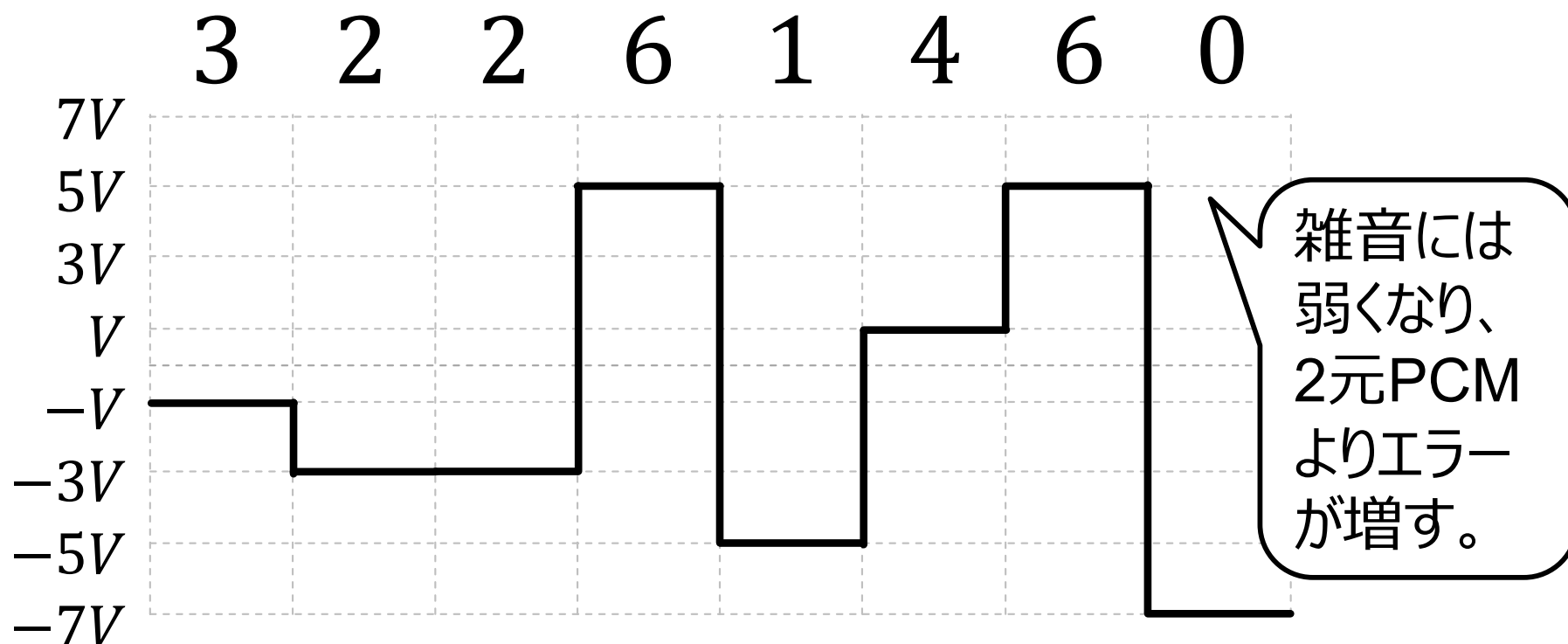
1. CMI 2. AMI 3. NRZI 4. NRZ 5. MLT-3

目次

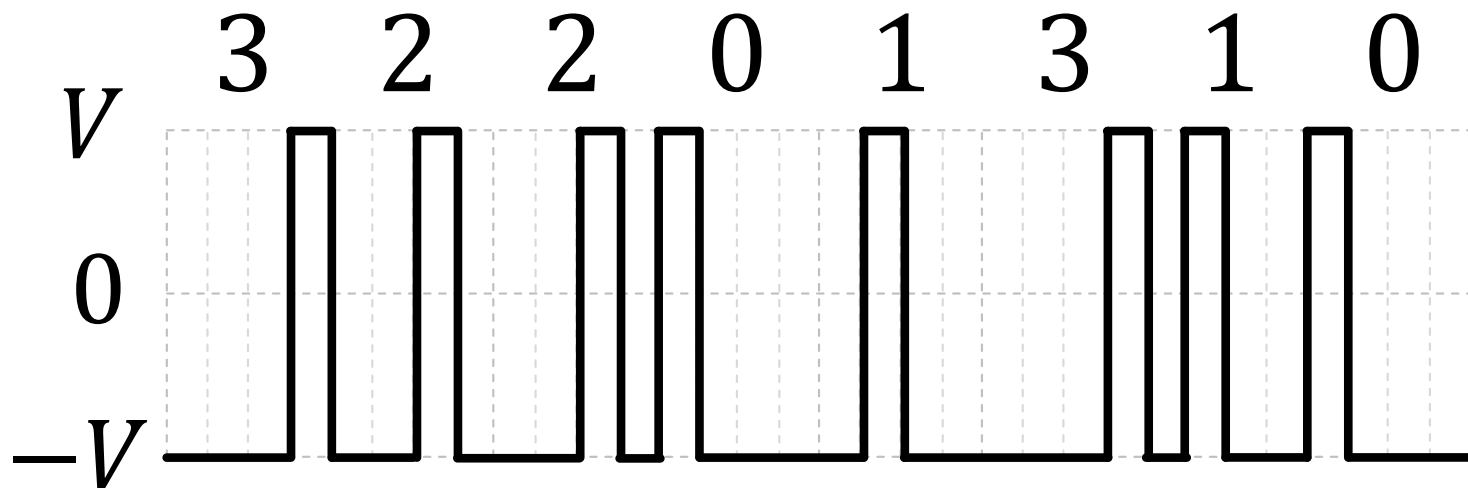
1. 伝送路符号
2. 多値パルス変調
3. 線形予測符号化
4. パルス整形フィルタ

- ◆ M個の値を、M個の異なるパルス波形で変調する方式を、**M元パルス変調**(M-ary pulse modulation)という。
- ◆ M元パルス変調には3種類あり、パルス振幅変調(**p**ulse **a**mplitude **m**odulation, **PAM**)、パルス位置変調(**p**ulse **p**osition **m**odulation, **PPM**)、パルス幅変調(**p**ulse **w**idth **m**odulation, **PWM**)がある。

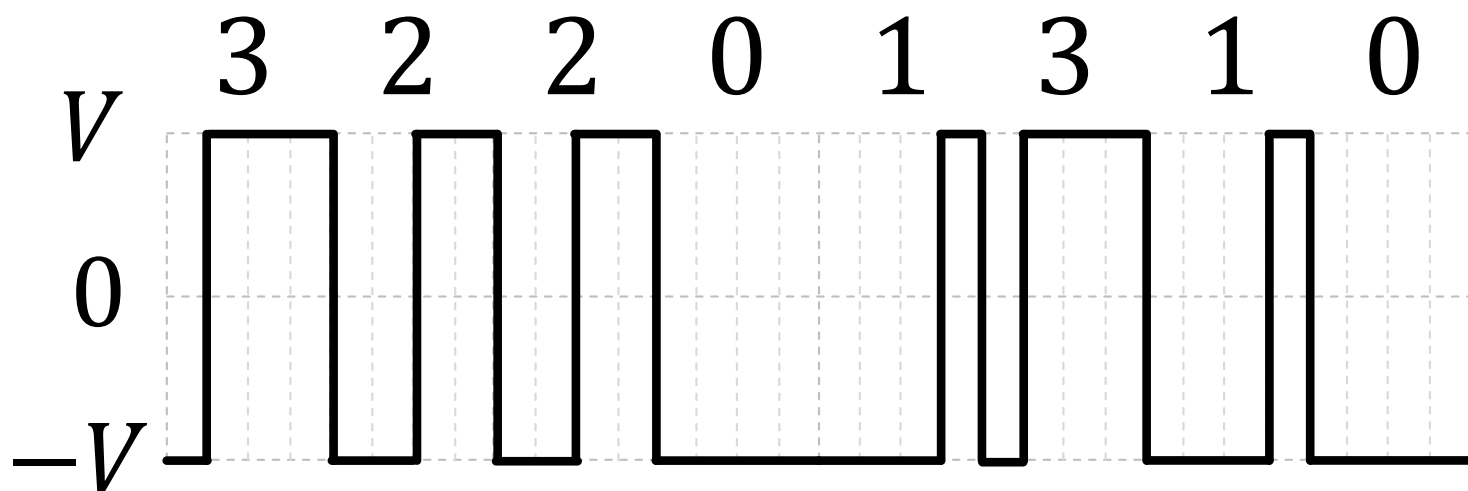
- ◆ 8元PAMを例示する。8元PAMの1ビット分は2元PCMの3ビット分に相当する。つまり、8元PAMは2元PCMの1/3しか帯域を使わない。



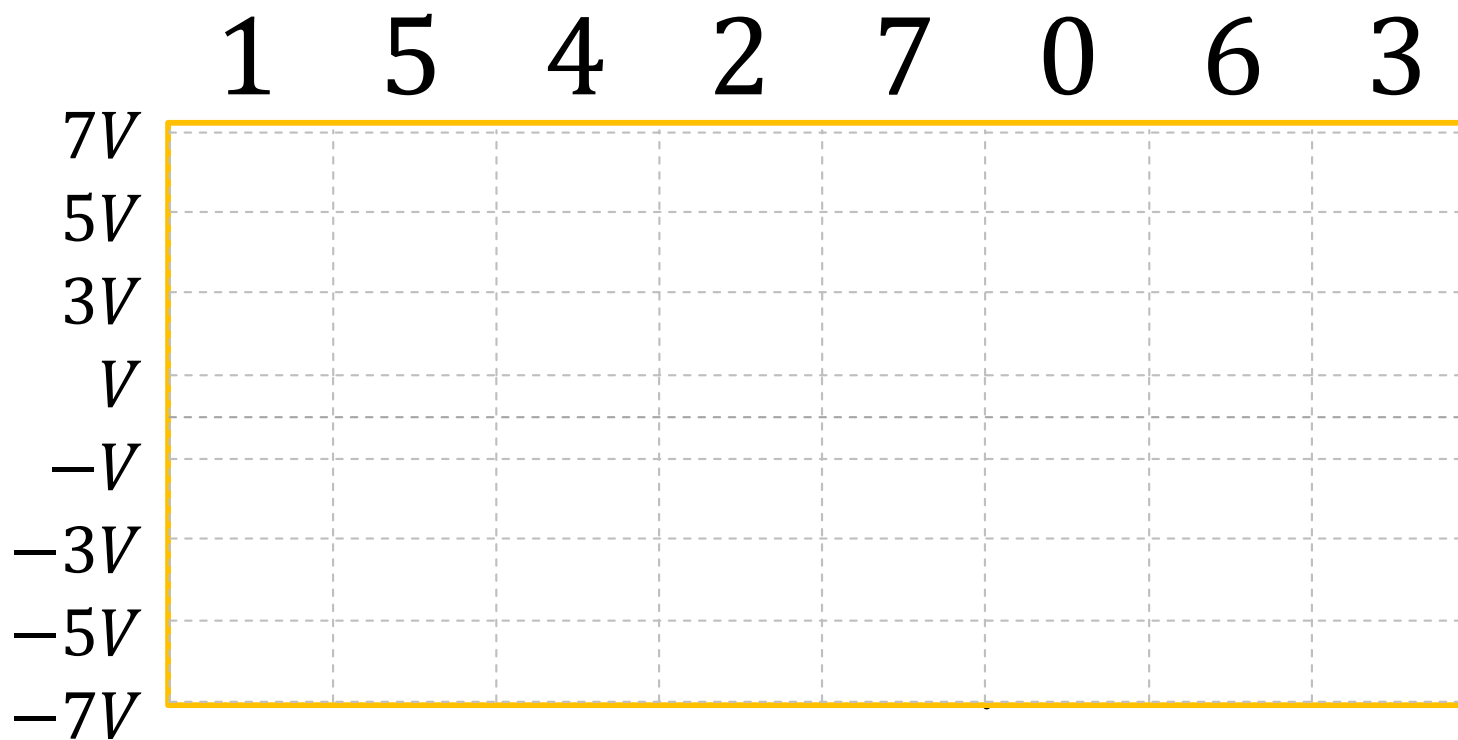
- ◆ M元PPMでは、PAMの1ビット幅をM分割し、値に応じた位置にパルスを送送する。下図に、4元PPMを例示する。
- ◆ 振幅雑音に強く、電力効率が低い。一方で、Mを大きくすると必要な帯域幅が増大する。



- ◆ M元PWMでは、PAMの1ビット幅をM分割し、値に応じた幅のパルスを伝送する。下図に4元PWMを例示する。
- ◆ 振幅雑音に強く、電力効率が低い。一方で、Mを大きくすると必要な帯域幅が増大する。



◆ 8元PAMの波形で、{1, 5, 4, 2, 7, 0, 6, 3}を
表せ。



- ◆ アナログ信号をデジタル信号に変換して伝送するデジタル伝送方式において、アナログ信号を標本化することにより得られる ① 信号は、アナログ信号波形の大きさをパルスの振幅で表している。

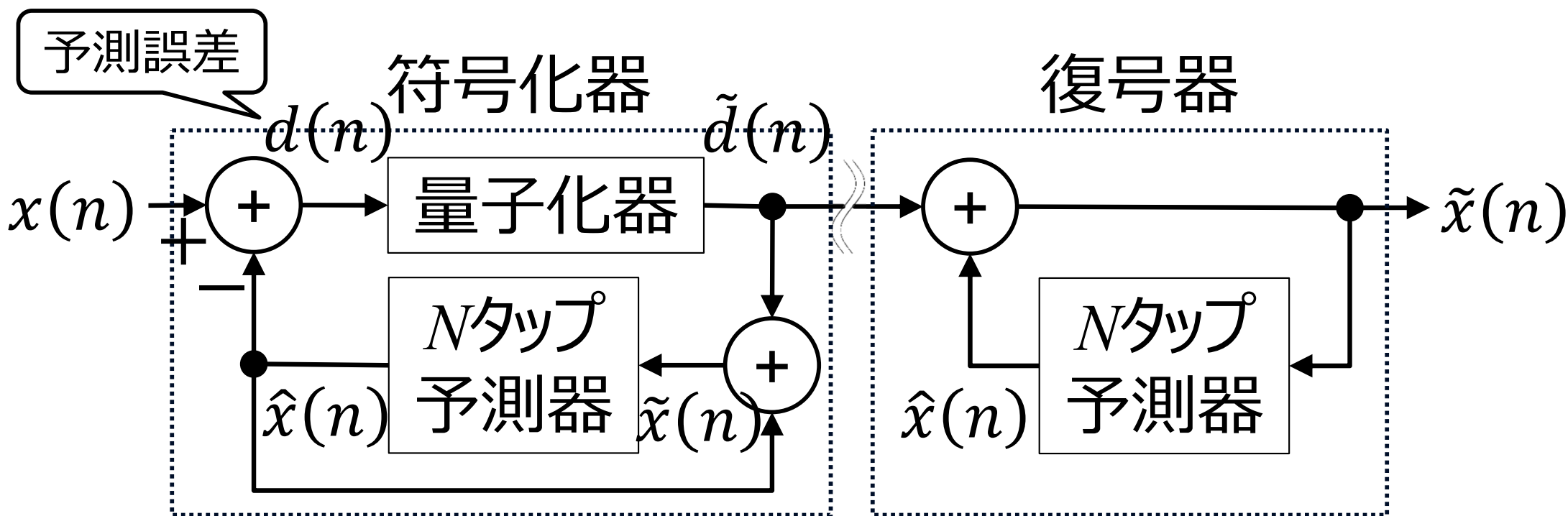
選択肢：

1. PCM 2. PWM 3. PPM
4. PAM 5. PNM

目次

1. 伝送路符号
2. 多値パルス変調
3. 線形予測符号化
4. パルス整形フィルタ

◆ **少ない量子化ビット数で伝送**すればデータ量を減らせる。その手法として、過去のデータから新しいデータを表す**差分パルス符号変調** (differential PCM, DPCM)がある。



$$\tilde{d}(n) = q[d(n)] = q[x(n) - \hat{x}(n)] \quad (10-1)$$

$$\tilde{x}(n) = \hat{x}(n) + \tilde{d}(n) \quad (10-2)$$

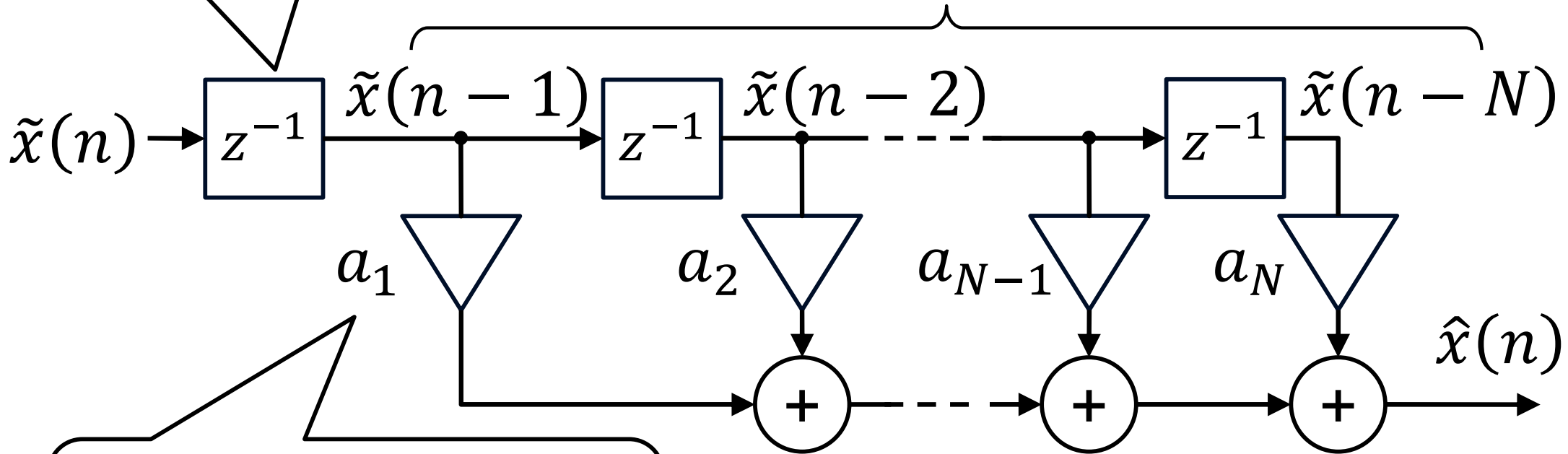
- ◆ 過去の N 個のサンプルから現在のサンプルを予測する予測器には、**線形予測符号化** (linear prediction coding, LPC)が用いられる。

$$\begin{aligned} \hat{x}(n) &= a_1 \tilde{x}(n-1) + a_2 \tilde{x}(n-2) + \cdots + a_N \tilde{x}(n-N) \\ &= \sum_{m=1}^N a_m \tilde{x}(n-m) \end{aligned} \quad (10-3)$$

◆ Nタップ線形予測器は下図で表される。

z^{-1} は1クロック
遅延を意味する

過去のN個のサンプル



信号処理におけるタップとは
遅延信号を取り出して係数
をかける乗算器を意味する

- ◆ 予測誤差は次式で表され、 $d(n)$ が最小になるよう係数 a_m が設計される。

$$d(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) - \sum_{m=1}^N a_m \tilde{x}(n-m) \quad (10-4)$$

- ◆ 予測誤差が小さいほど、 $\tilde{d}(n)$ を生成する量子化器の量子化ビット数は少なくて済む。すなわち、伝送に用いる量子化ビット数が少ない。

- ◆ 予測誤差の2乗平均(自己相関関数)を求め、係数 a_i で偏微分する。

$$R_d(0) = E[d(n)^2] = E[\{x(n) - \hat{x}(n)\}^2] \quad (10-5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_d(0)}{\partial a_i} &= -2E \left[\{x(n) - \hat{x}(n)\} \frac{\partial \hat{x}(n)}{\partial a_i} \right] \\ &= 2 \left\{ R_x(i) - \sum_{m=1}^N a_m R_x(i-m) \right\} \quad (10-6) \end{aligned}$$

ここで、 $R_x(m)$ はサンプル $x(n)$ の自己相関関数。

◆ 最適なタップ係数を a_i^{opt} とし偏微分を0とすると、

$$\begin{bmatrix} R_x(1) \\ R_x(2) \\ \vdots \\ R_x(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(-1) & \cdots & R_x(1-N) \\ R_x(1) & R_x(0) & \cdots & R_x(2-N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(N-1) & R_x(N-2) & \cdots & R_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{\text{opt}} \\ a_2^{\text{opt}} \\ \vdots \\ a_N^{\text{opt}} \end{bmatrix} \quad (10-7)$$

◆ 左辺列ベクトルを \mathbf{r}_1^N 、右辺の正方行列を \mathbf{R}_N 、右辺列ベクトルを \mathbf{a}^{opt} とすると、ユール・ウォーカー方程式が得られる。

$$\mathbf{r}_1^N = \mathbf{R}_N \mathbf{a}^{\text{opt}} \quad (10-8)$$

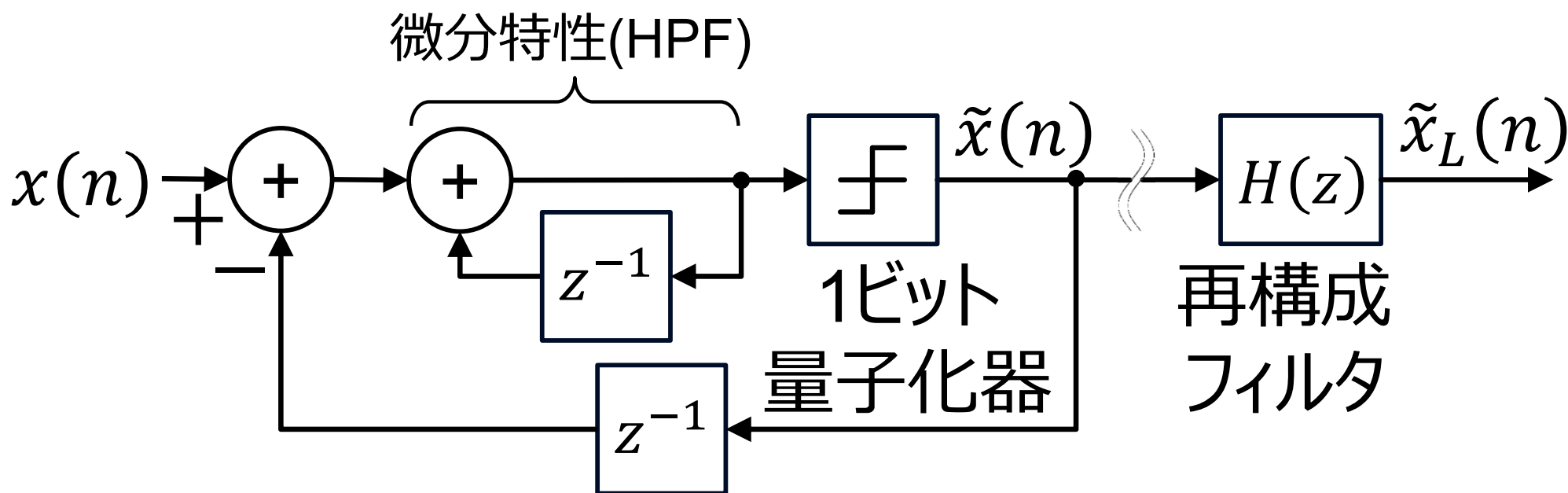


- ◆ R_N は対角線が同一(テプリッツ行列)、かつ、 $R(m) = R(-m)$ で対象行列であるから、レビンソン=ダービン・アルゴリズムにより高速に解くことができる。
- ◆ 最適化した a^{opt} を係数とするとき、予測誤差 $d(n)$ の自己相関 $R_d(m)$ は離散デルタ関数であり電力スペクトル密度が一定であることから、 a^{opt} を係数とする予測器(デジタルフィルタ)を、**白色化フィルタ**という。

- ◆ ナイキスト周波数よりはるかに高速にオーバーサンプリングすると、隣り合うサンプルの相関が高くなる。過去のサンプル数を減らし、 $a_1 = 1$ の1タップ予測DPCMおよび1ビット量子化器を用いて予測符号化を行うものを、**デルタ変調** (Δ 変調、delta modulation)という。
- ◆ DPCMの符号化器のうしろにLPFが必要。伝送中の $d(n)$ に誤りがあると、復号器で累積誤差となってしまう。



- ◆ Δ 変調を改良したものが、**デルタシグマ変調** ($\Delta\Sigma$ 変調、delta-sigma modulation)である。



- ◆ 量子化雑音の低周波域が微分によって減り、**ノイズシェーピング**される。

詳しくはAD変換器の回路理論を調べよ。

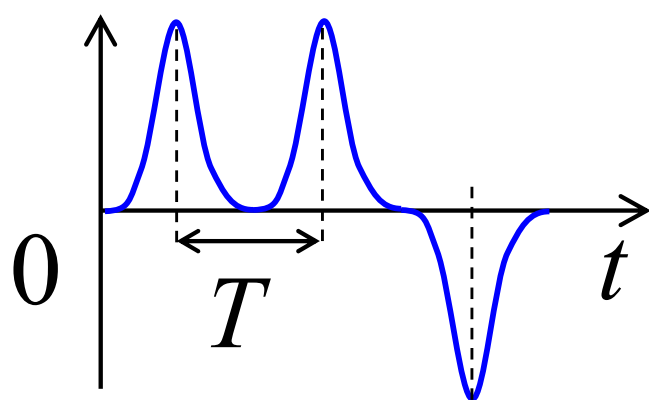
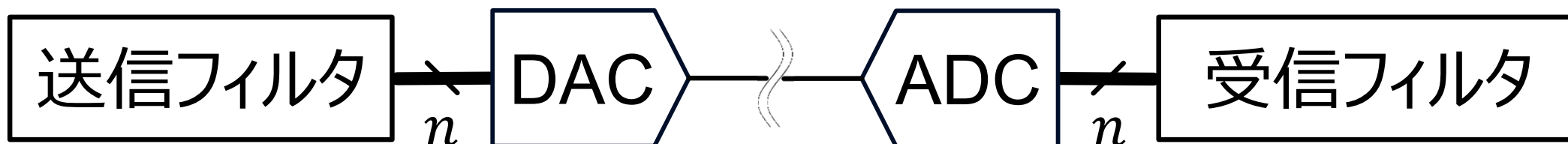
◆原信号をデジタル化する際に近接する標本値間の相関が大きい(中略)信号をデジタル伝送する場合、(中略)情報の冗長性を取り除くことにより、伝送するデータのビット数を減らすことができる ① が用いられる。

選択肢： 1. 暗号化 2. 直線符号化
3. バイポーラ符号化 4. セル化 5. 予測符号化

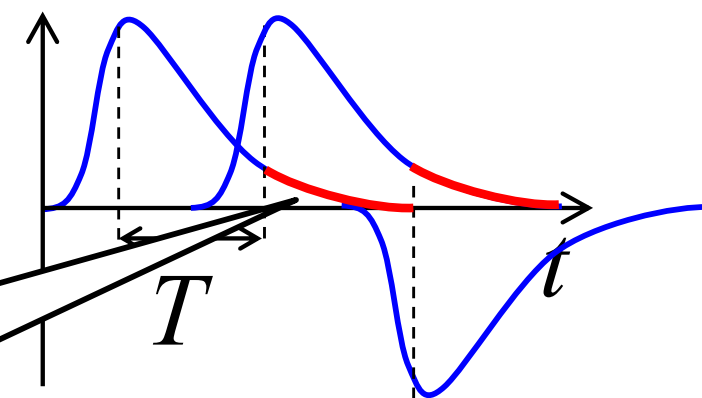
目次

1. 伝送路符号
2. 多値パルス変調
3. 線形予測符号化
4. パルス整形フィルタ

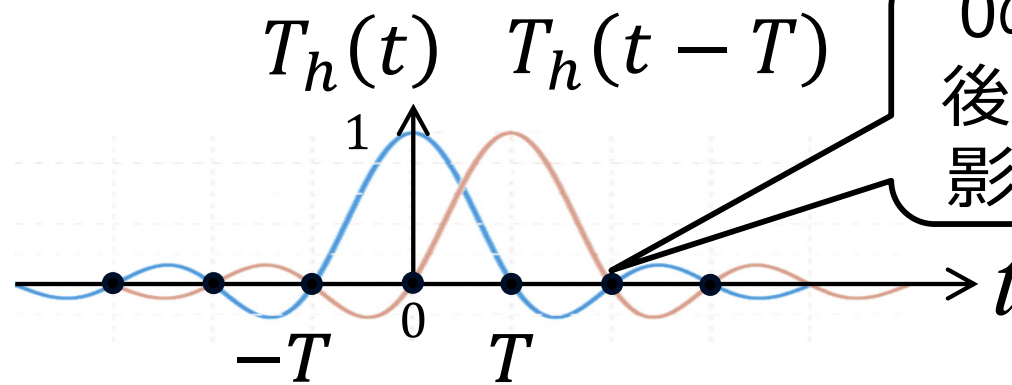
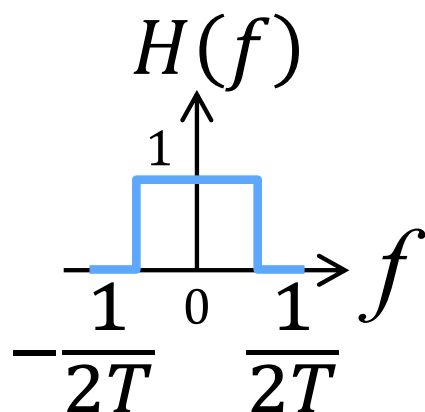
- ◆ 送信したパルス符号列は、受信フィルタにより変形して後続パルスに干渉することがある。これをシンボル間干渉 (inter-symbol interference, ISI) という。



後続パルスに重なっている。



- ◆ 送信フィルタの特性を $H_t(f)$ 、受信フィルタの特性を $H_r(f)$ 、シンボルレートを R_s とするとき、**ISIをゼロにするには**、 $R_s/2$ の帯域幅が必要で、システム特性 $H(f) = H_t(f)H_r(f)$ は理想的な方形LPF(ナイキストフィルタ)、時間軸はsincのインパルス応答(ナイキストインパルス)になる。



0の点では、
後続パルスに
影響しない。

◆ 代表的なナイキストフィルタは、**2乗余弦フィルタ**(raised cosine filter)であり、コサインロールオフフィルタと呼ばれることが多い。

$$H_{RC}(f) = \begin{cases} 1, & \left(|f| < \frac{1-\alpha}{2T} \right) \\ \cos^2 \left[\frac{\pi T}{2\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T} \right) \right], & \left(\frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \right) \\ 0, & \left(|f| > \frac{1+\alpha}{2T} \right) \end{cases} \quad (10-9)$$

ロールオフ
ファクタ α

$$h_{RC}(t) = \frac{\pi}{2(T + 2\alpha t)} \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{T} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{(T - 2\alpha t)}{2T} \right) \quad (10-10)$$

- ◆ 2乗余弦フィルタ $H(f)$ に対して、送信フィルタを $H_t(f) = \sqrt{H_{RC}(f)}$ とし、受信フィルタを $H_r(f) = \sqrt{H_{RC}(f)}$ とすることで、ベースバンドシステムのゼロISIができる。
- ◆ このとき、フィルタ $H_{RRC}(f) = \sqrt{H_{RC}(f)}$ を**ルート2乗余弦フィルタ**(root raised cosine filter)という。(式は省略)

伝送システム理論

Transmission system theory

第11講 デジタル変調方式

Lecture 11: Digital modulation scheme



古川 靖

埼玉工業大学 工学部 情報システム学科

目次

1. 線形変調方式
2. 周波数変調方式
3. 直交変調
4. 変調信号のスペクトル

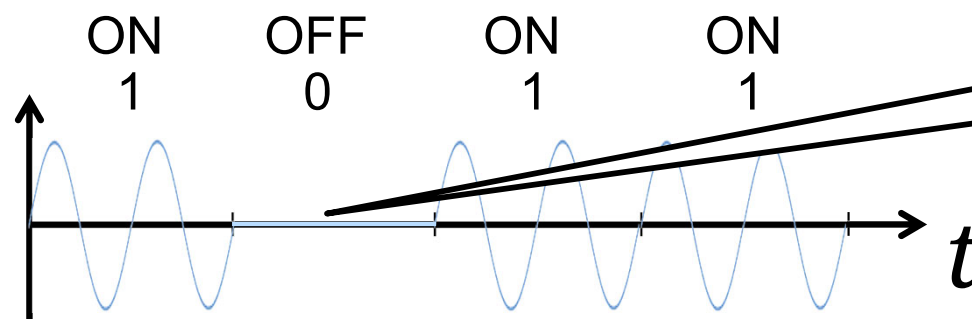
- ◆ アナログ変調(AM, PM, FM)では、連続する入力信号によって搬送波を変えて伝送した。
- ◆ デジタル変調では、離散信号を入力とする。離散信号は、2元の場合0と1であり、この2値をビット(**binary digit**, bit)という。
- ◆ ビット列が表す入力信号に比例して、搬送波の振幅や位相を変えるデジタル変調のことを、**線形デジタル変調方式**(linear modulation)という。

- ◆ **1ビット**の入力信号が、1のとき信号を送信し、0のとき送信しない方式を、**オンオフキーイング (on-off keying, OOK)**という。

$$s_{\text{OOK}}(t) = x_{\text{OOK}}(t) \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

$$= \begin{cases} \cos(2\pi f_c t + \phi), & (b_n = 1) \\ 0, & (b_n = 0) \end{cases} \quad (11-1)$$

$x_{\text{OOK}}(t)$ は
ベースバンド
信号。



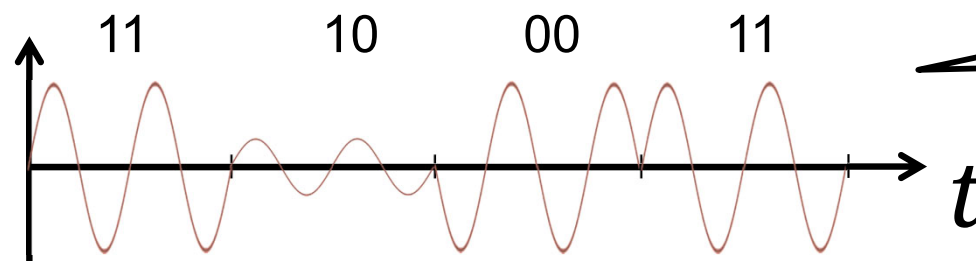
オフのときは
無信号状態。

◆ **Mビットの入力に応じて振幅を変化させる合をデジタル振幅変調 (amplitude shift keying, ASK) という。**

$$s_{\text{ASK}}(t) = x_{\text{ASK}}(t) \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

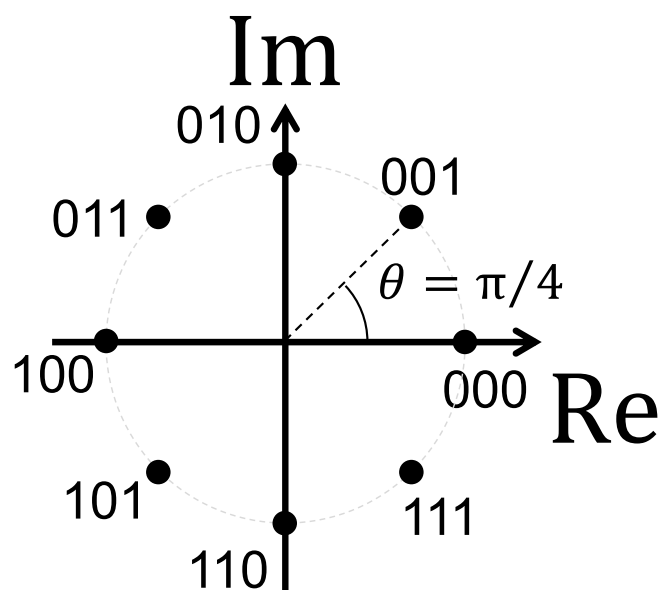
$x_{\text{ASK}}(t)$ は
ベースバンド
信号。

$$= \begin{cases} A \cos(2\pi f_c t + \phi) \\ \frac{2i - 2^M + 1}{2^M - 1} \cos(2\pi f_c t + \phi) \\ -A \cos(2\pi f_c t + \phi) \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, 2^M - 1 \quad (11-2)$$



無信号状態は
発生しない。

- ◆ ベースバンド信号の振幅を1に保ったまま**位相**だけを入力ビットに応じて変化させる方式を、**デジタル位相変調方式**(**phase shift keying, PSK**)という。



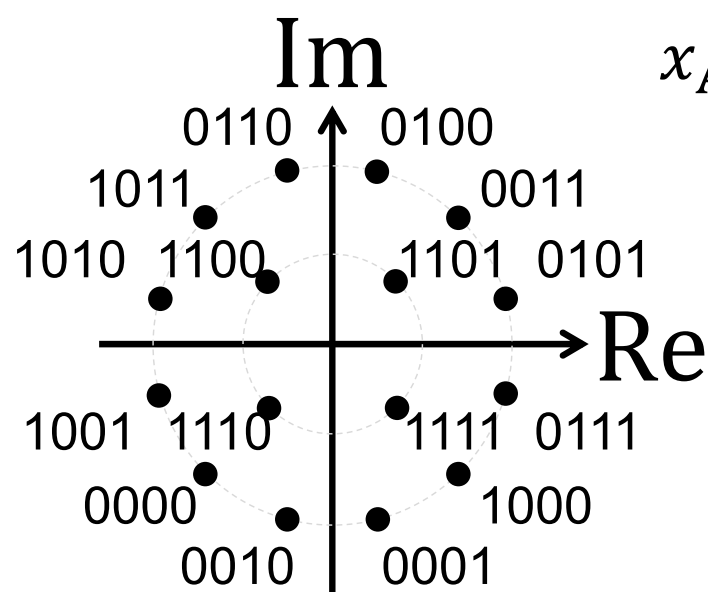
入力が3ビットの8PSK

$$x_{\text{PSK}}(t) = e^{j2\pi m(t)} \quad (11-3)$$

$$m(t) = \begin{cases} \frac{2^M - 1}{2^M} \\ \vdots \\ 0 \end{cases} \quad (11-4)$$



◆ベースバンド信号の**振幅と位相**の両方を入力ビットに応じて変化させる方式を**デジタル振幅位相変調方式**(**amplitude phase shift keying, APSK**)という。



入力が4ビットの16APSK

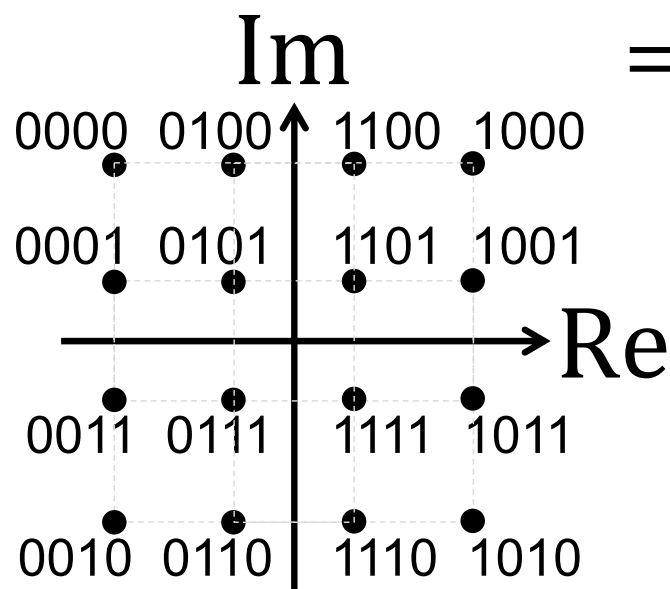
$$x_{\text{APSK}}(t) = \begin{cases} r_1 e^{j(2\pi \frac{i}{n_1} + \phi_1)}, & i = 0, 1, \dots, n_1 - 1 \\ \vdots \\ r_k e^{j(2\pi \frac{i}{n_k} + \phi_k)}, & i = 0, 1, \dots, n_k - 1 \end{cases} \quad (11-5)$$

星を散りばめたような配置になっている。スターAPSKともいう。左図は、星座図(**コンステレーション**)という。

- ◆ 振幅および位相を変化させるAPSKの配置を **格子状**にしたものを、**直交振幅変調方式** (quadrature amplitude modulation, QAM)という。

$$s_{\text{QAM}}(t) = \text{Re}[x_{\text{QAM}}(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

$$= x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (11-6)$$



入力が4ビットの16QAM

$$x_{I,Q}(t) = A \frac{2i - 2^M + 1}{2^M - 1} \quad (11-7)$$

※ 4QAMは、QPSK (4PSK)と同じ配置。

APSKとQAMの比較

- ◆ いずれも複素平面上の振幅と位相を変える。ただ、QAMは実軸・虚軸をAMしているようにみえるため、直交振幅変調と呼ぶ。

特徴	APSK	QAM
信号点配置	同心円状	格子状
振幅の数	少ない	多い
強み	ノイズに強い	周波数利用効率高い
主な用途	衛星通信など	WiFi、地デジ

◆ デジタル信号の変調について述べた次の文章のうち、正しいものは である。

- ① ASKの変調波は、振幅が一定の搬送波とベースバンド信号である変調信号との差分を取ることによって得られる。変調度が100[%]のASKは、一般に、オンオフキーイング（OOK）といわれる。
- ② PSKの変調波は、搬送波の周波数を一定にして変調符号の符号列に応じて搬送波の位相を変化させることによって得られる。利用する位相数により 2相PSK、4相PSK、8相PSKなどがある。
- ③ （略）
- ④ QAMの変調波は、互いに独立に生成された二つのベースバンド信号で直交する二つの搬送波をそれぞれ周波数変調し、その出力を合成することによって得られる。1シンボル当たり6ビットの号を伝送できる64QAMなどがある。

◆ ベースバンド信号の生成

ビット数 M の入力をシンボル a_n に割り当てる(マップする)関数。

$$a_n = \text{map}(b_{nM}, b_{nM+1}, \dots) \quad (11-8)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - nT) \quad (11-9)$$

周期 T ごとにシンボルが並ぶ波形。

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & (0 \leq t < T) \\ 0, & (t < 0, T \leq t) \end{cases} \quad (11-10)$$

幅 T に書き換えたデルタ関数。

◆ 送信信号の生成

周波数 f_c の搬送波にのせた状態。

$$s(t) = \text{Re}[x(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (11-11)$$

- ◆ (11-8)式に示した $\text{map}()$ 関数の代表例として、ナチュラルコードとグレイコードがある。
- ◆ ナチュラルコードは、隣接する信号点に順番に数字を割り当て、それを2進数表現したものである。
- ◆ グレイコードは、信号点への割り当て数字を2進数表現したときに、隣接する信号点どうしが1ビットだけ異なるようにしたものである。

- ◆ (11-2)式において4ASKを考えると、振幅が $A, A/3, -A/3, -A$ となる4シンボルがある。2ビットの数を割り当てる符号化方法が2つある。

振幅	ナチュラルコード	グレイコード
A	11	10
$A/3$	10	11
$-A/3$	01	01
$-A$	00	00

← 1ビットしか変化しない

- ◆ (11-4)式において4PSKを考えると、位相が $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ となる4シンボルがある。

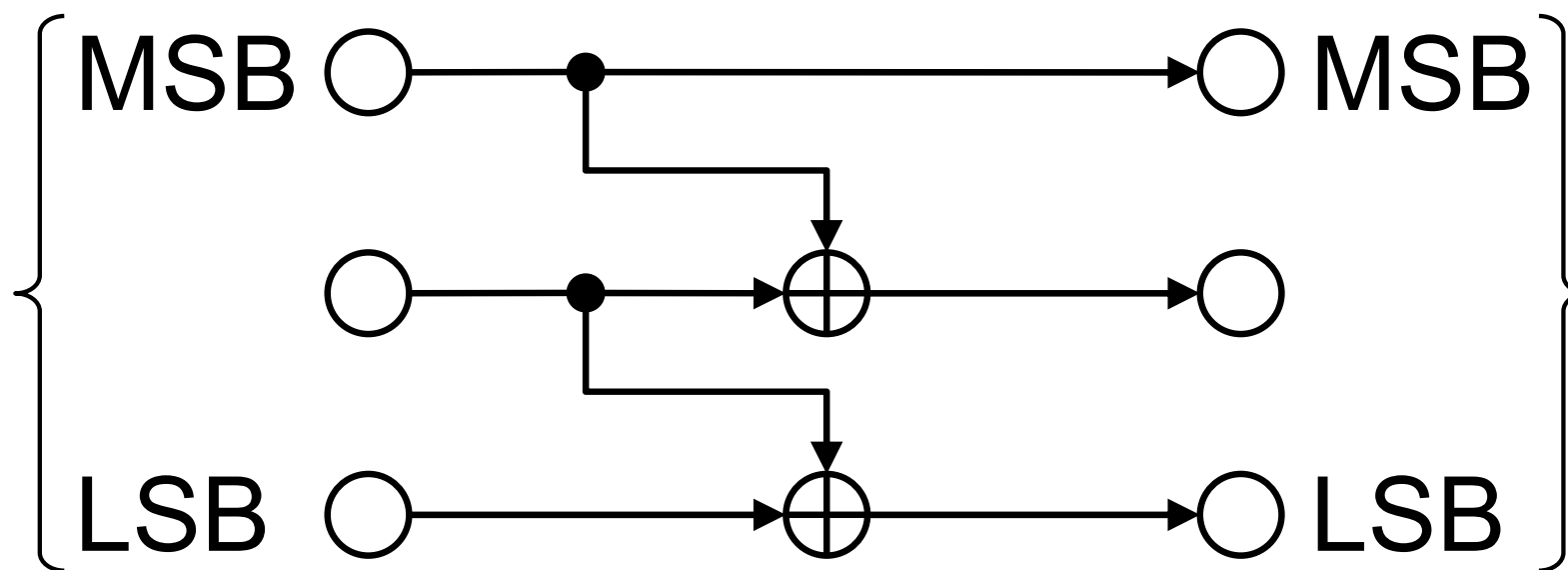
位相	ナチュラルコード	グレイコード
0	00	00
$\pi/2$	01	01
π	10	11
$3\pi/2$	11	10

← 1ビットしか変化しない

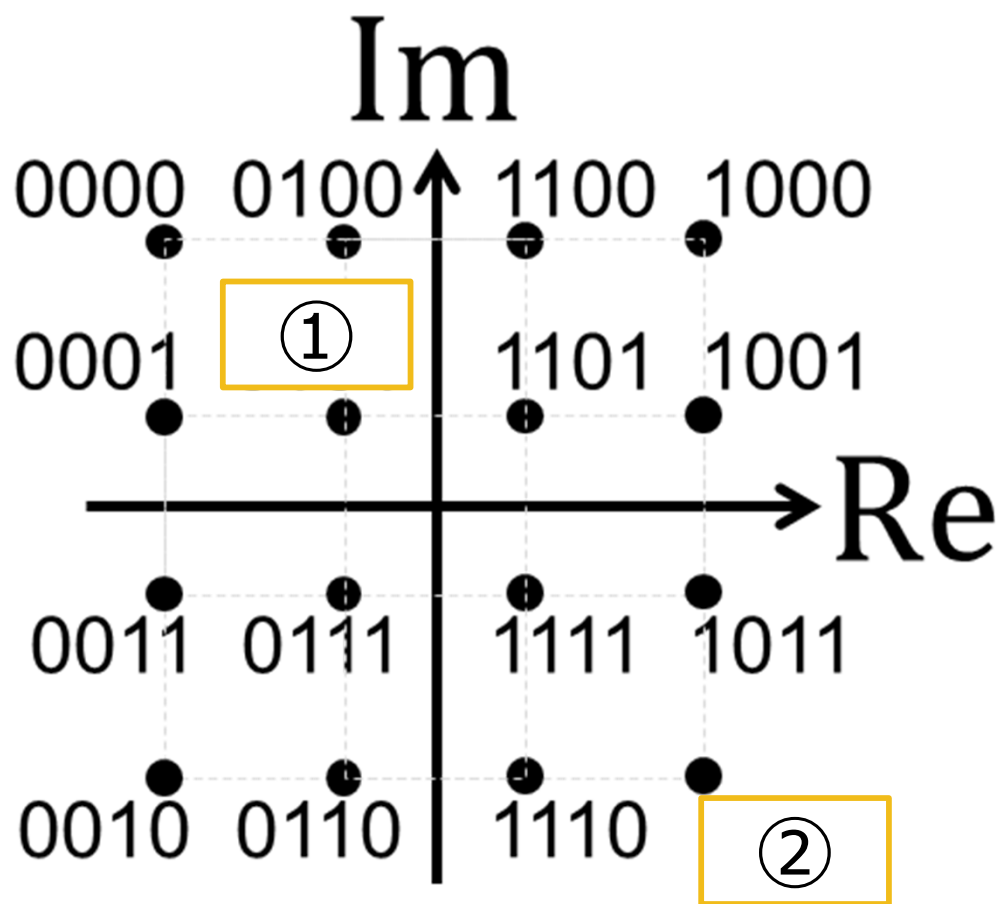
- ◆ 上位ビットを下位ビットに排他的論理和 (exclusive or, XOR) で加えることで、ナチュラルコードからグレイコードを生成できる。

Natural Binary Code

Gray Code



◆ 下図に示す16QAMのシンボルがグレイコードになるよう、空欄を埋めよ。

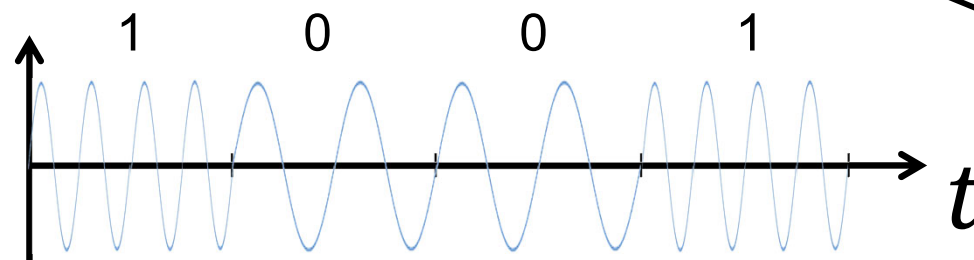


目次

1. 線形変調方式
2. 周波数変調方式
3. 直交変調
4. 変調信号のスペクトル

- ◆ 送信信号の**周波数**を入力ビットに応じて離散的に変化させる方式を**デジタル周波数変調方式**(**f**requency **s**hift **k**eying, FSK)という。
- ◆ 2FSKは次の式で表される。

$$s_{\text{FSK}}(t) = \begin{cases} \cos\left(2\pi f_c t + \beta \frac{\pi}{T} t\right), & (b_n = 1) \\ \cos\left(2\pi f_c t - \beta \frac{\pi}{T} t\right), & (b_n = 0) \end{cases} \quad (11-12)$$



変調指数 β が大きいと広い帯域が必要。
 $\beta = 1/2$ はMSK。

目次

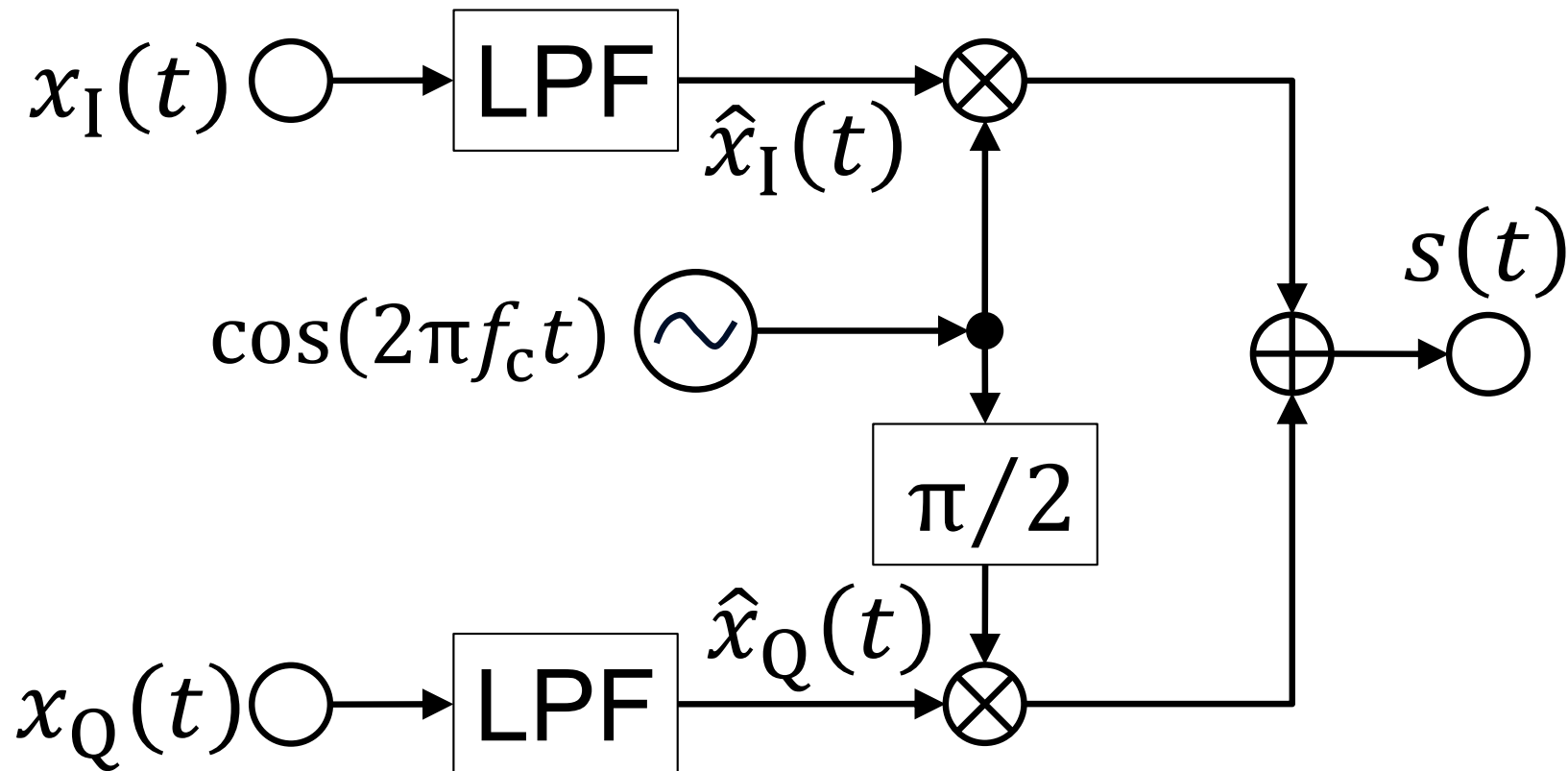
1. 線形変調方式
2. 周波数変調方式
3. 直交変調
4. 変調信号のスペクトル

- ◆ ベースバンド信号から搬送波周波数帯への周波数変換は、ASK, PSK, FSK, QAMなどの変調方式によらず同一の処理で行える。これを直交変調という。

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re}[x(t)e^{j2\pi f_c t}] \\ &= x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (11-13) \end{aligned}$$

- ◆ ただし、 $x(t) = x_I(t) + jx_Q(t)$ である。添え字のIは同相成分(In-phase)、Qは直交成分(Quadrature-phase)を意味する。

- ◆ 方形パルスのスペクトルは理論的に ∞ に広がってしまふ。LPFを通して帯域を制限した $\hat{x}(t) = \hat{x}_I(t) + j\hat{x}_Q(t)$ を用いて変調する。



- ◆ (11-13)式を、LPFで帯域制限した信号
 $\hat{x}(t) = \hat{x}_I(t) + j\hat{x}_Q(t)$ で書き換えなさい。

目次

1. 線形変調方式
2. 周波数変調方式
3. 直交変調
4. 変調信号のスペクトル

- ◆ 変調信号のスペクトルは、 $s(t)$ のフーリエ変換から得られる。 $\text{Re}[c] = (c + c^*)/2$ より、

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[x(t) e^{j2\pi f_c t}] e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_c)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j2\pi(f+f_c)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} [X(f - f_c) + X^*(-f - f_c)] \end{aligned} \quad (11-14)$$

- ◆ 線形変調の送信シンボル a_n はランダムに発生すると仮定する。

$$E[a_n a_m] = 0, \quad n \neq m \quad (11-15)$$

- ◆ このとき、変調信号のパワースペクトルは、

$$\begin{aligned} |S(f)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \{E[x^*(t)x(t-\tau)e^{-j2\pi(f+f_c)t}] + E[x(t)x^*(t-\tau)e^{-j2\pi(f-f_c)t}]\} d\tau \\ &= \frac{1}{4} \{|X(-f-f_c)|^2 + |X(f-f_c)|^2\} \end{aligned} \quad (11-16)$$

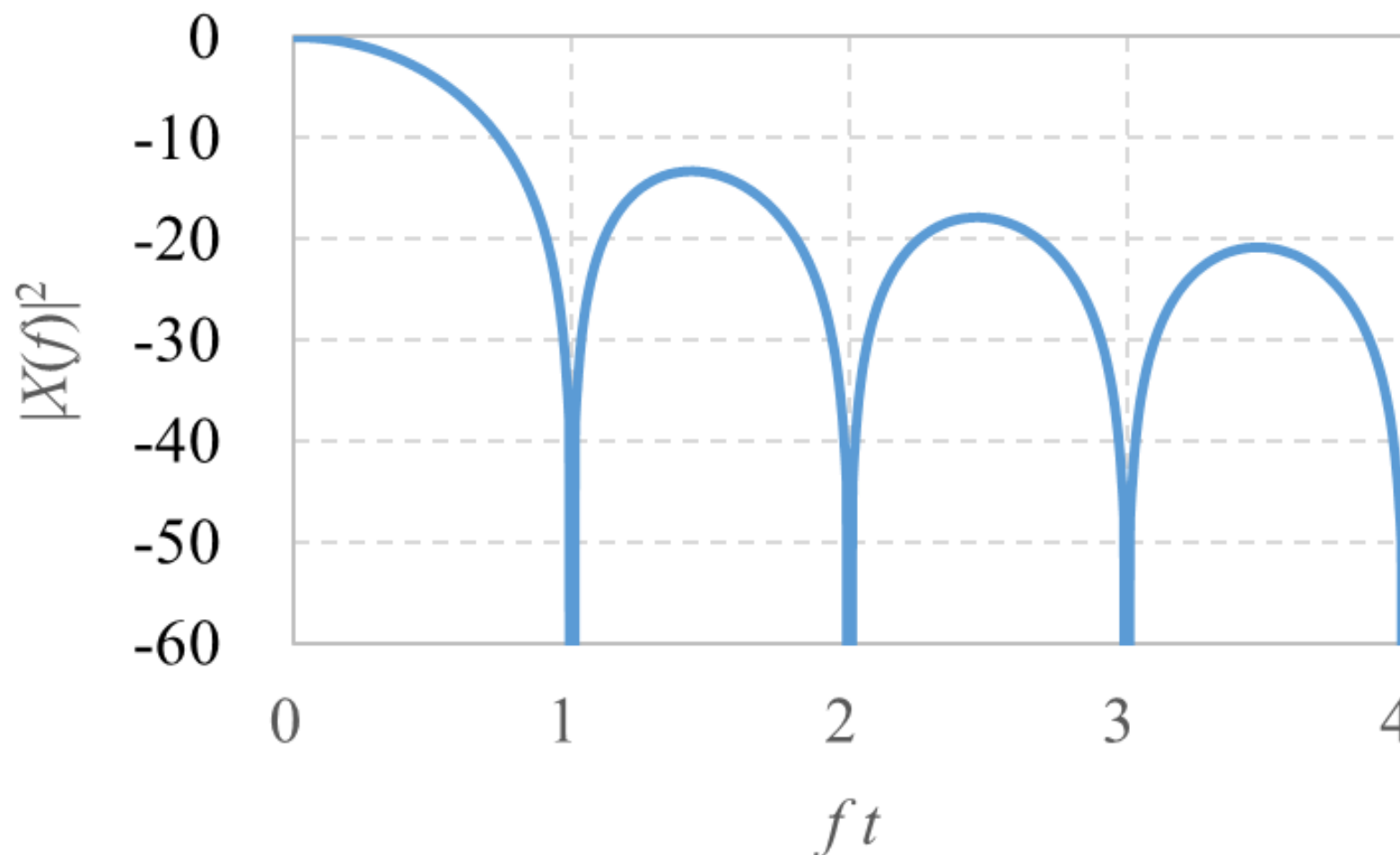
- ◆ (11-16)式の第1項、第2項はいずれも $|X(f)|^2$ を周波数方向に f_c だけ移動させたものである。
- ◆ ベースバンド信号の相関行列 $R(\tau)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} R(\tau) &= E[x^*(t)x(t-\tau)] \\ &= E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n^* \delta(t-nT) a_m \delta(t-\tau-mT)\right] \\ &= \begin{cases} \frac{\sigma_a^2}{T} (T-|\tau|), & |\tau| \leq T \\ 0, & |\tau| > T \end{cases} \end{aligned} \quad (11-17)$$

◆ 第4講ウィナー・ヒンチンの定理(4-27b)式より、

$$\begin{aligned} |X(f)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-T}^T \frac{\sigma_a^2}{T} (T - |\tau|) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \sigma_a^2 T \left\{ \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right\}^2 = \sigma_a^2 T \operatorname{sinc}^2(\pi f T) \end{aligned} \quad (11-18)$$

◆線形変調信号のパワースペクトルを示す。



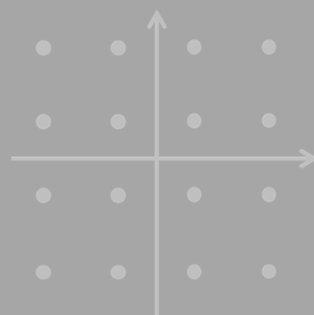
$$|X(f)|^2 = \int_{-T}^T \frac{\sigma_a^2}{T} (T - |\tau|) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{\sigma_a^2}{T} \cdot 2 \int_0^T (T - \tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau$$

$u = T - \tau, u' = -1, v = \frac{\sin(2\pi f\tau)}{2\pi f}, v' = \cos(2\pi f\tau)$ として部分積分する。

$$\begin{aligned} \int_0^T uv' d\tau &= \left(uv - \int_0^T u' v d\tau \right) = \left[(T - \tau) \frac{\sin(2\pi f\tau)}{2\pi f} \right]_0^T - \int_0^T (-1) \frac{\sin(2\pi f\tau)}{2\pi f} d\tau \\ &= (0 - 0) + \frac{1}{2\pi f} \int_0^T \sin(2\pi f\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi f} \left[-\frac{\cos(2\pi f\tau)}{2\pi f} \right]_0^T = \frac{1}{(2\pi f)^2} [1 - \cos(2\pi fT)] \\ &= \frac{1}{(2\pi f)^2} 2\sin^2(\pi fT) = \frac{T^2}{2} \left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \right]^2 \end{aligned}$$

$$|X(f)|^2 = \frac{2\sigma_a^2}{T} \cdot \frac{T^2}{2} \left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \right]^2 = \sigma_a^2 T \left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \right]^2 = \sigma_a^2 T \operatorname{sinc}^2(\pi fT)$$

Thank you.



伝送システム理論

Transmission system theory

第12講 デジタル通信における最適受信

Lecture 12: Optimal receiving in digital communications



古川 靖

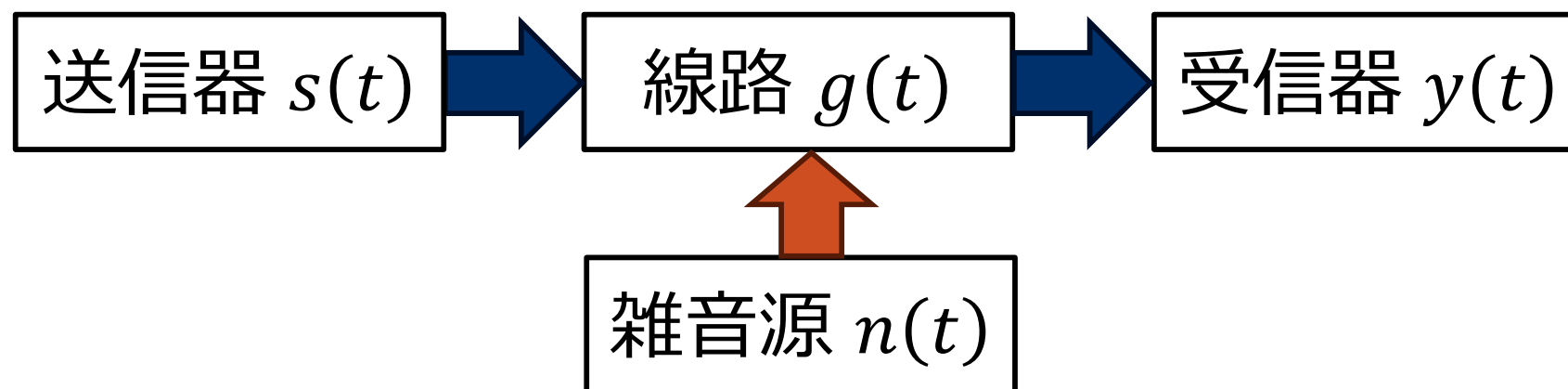
埼玉工業大学 工学部 情報システム学科

目次

1. 等価低減系
2. 整合フィルタ
3. 最適受信
4. 信号の検波

- ◆ (11-10)式に定義したインパルス信号を伝送路に入力したときの出力を、**インパルス応答**という。受信信号 $y(t)$ は、送信信号 $s(t)$ とインパルス応答 $g(t)$ の畳み込みにより表される。

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau)s(t - \tau) d\tau + n(t) \quad (12-1)$$



◆ (11-11)式に定義した送信信号を、(12-1)式に代入すると、

$$y(t) = \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} g(\tau) x(t - \tau) e^{j2\pi f_c(t-\tau)} d\tau \right] + n(t) \quad (12-2)$$

ここで、

$$h(\tau) = g(\tau) e^{-j2\pi f_c \tau} \quad (12-3)$$

$$r(\tau) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau + n(t) e^{-j2\pi f_c t} \quad (12-4)$$

とすると、

◆ 受信信号は次式に書き換えられる。

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} g(\tau) x(t - \tau) e^{j2\pi f_c(t-\tau)} d\tau \right] + n(t) \\ &= \operatorname{Re} \left[e^{j2\pi f_c t} \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \right] + n(t) \\ &= \operatorname{Re} \left[e^{j2\pi f_c t} r(t) \right] \end{aligned} \quad (12-5)$$

◆ $h(\tau)$ と $r(t)$ は複素数である。 $h(\tau)$ は時間 t を含まないのでゼロ周波数帯である。 $x(t)$ と $r(t)$ は搬送波を含まない**ベースバンド信号**である。

- ◆ (12-4)式は、ベースバンド信号 $x(t)$ を入力したときの、ベースバンドのインパルス応答 $h(\tau)$ の線路が出力する信号の式である。
- ◆ (12-4)式は、(12-1)式と同様の形であり、信号をベースバンドに置き換えた形である。
- ◆ (12-5)式はベースバンド信号 $r(t)$ を周波数変換する様子を表している。この $r(t)$ を帯域信号 $y(t)$ の等価低減系表現という。

目次

1. 等価低減系
2. 整合フィルタ
3. 最適受信
4. 信号の検波

- ◆ (12-4)式のベースバンド信号 $r(t)$ に対するフーリエ変換 $R(f)$ は次式で表される。

$$R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-j2\pi ft} dt = H(f)X(f) + N(f) \quad (12-6)$$

- ◆ ここで、 $H(f)$, $X(f)$, $N(f)$ はそれぞれ、インパルス応答 $h(t)$ 、送信ベースバンド信号 $x(t)$ 、付加雑音 $n_B(t) = n(t)e^{-j2\pi f_c t}$ のフーリエ変換である。

- ◆ 簡単にするため、 $x(t) = \delta(t)$ の場合を考える。

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1 \quad (12-7)$$

- ◆ 伝送路の付加雑音を低減するために、インパルス応答 $w(t)$ のフィルタが適用されるとき、フィルタの出力信号 $z(t)$ は、

フィルタの畳み込みはスペクトルの積

$$\begin{aligned} z(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(t)r(\tau - t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} W(f)R(f)e^{j2\pi f \tau} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W(f)H(f)e^{j2\pi f \tau} df + \int_{-\infty}^{\infty} W(f)N(f)e^{j2\pi f \tau} df \end{aligned} \quad (12-8)$$

(12-6)式で $X(f) = 1$ を使用

◆ フィルタの出力におけるSNRは、

$$\text{SNR} = \frac{\text{E} \left[\left| \int_{-\infty}^{\infty} W(f)H(f)e^{j2\pi f\tau} df \right|^2 \right]}{\text{E} \left[\left| \int_{-\infty}^{\infty} W(f)N(f)e^{j2\pi f\tau} df \right|^2 \right]} \quad (12-9)$$

◆ 付加雑音が白色ガウス分布であるとき、雑音電力を σ^2 とすると、その相関は次式で表せる。

$$\text{E}[N(f_1)N^*(f_2)] = \sigma^2 \delta(f_1 - f_2) \quad (12-10)$$

$$\text{E} \left[\left| \int_{-\infty}^{\infty} W(f)N(f)e^{j2\pi f\tau} df \right|^2 \right] = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2 df \quad (12-11)$$

- ◆ (12-9)式の分子に、コーシー・シュワルツ (Cauchy-Schwartz)の不等式を利用すると、

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} W(f)H(f)e^{j2\pi f\tau} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)e^{j2\pi f\tau}|^2 df \quad (12-12)$$

- ◆ (12-11),(12-12)式を(12-9)式に代入し、

$$\text{SNR} \leq \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)e^{j2\pi f\tau}|^2 df \quad (12-13)$$

- ◆ SNRが最大になるのは等号が成立するとき。

- ◆ コーシー・シュワルツの不等式で等号が成立する条件は次式で表される。

$$W^*(f) = H(f)e^{j2\pi f\tau} \quad (12-14)$$

- ◆ (12-14)式でSNRを最大化するフィルタを、**整合フィルタ**という。整合フィルタの時間応答は次式のようになるので、インパルス応答 $h(t)$ をもとに設計できる。

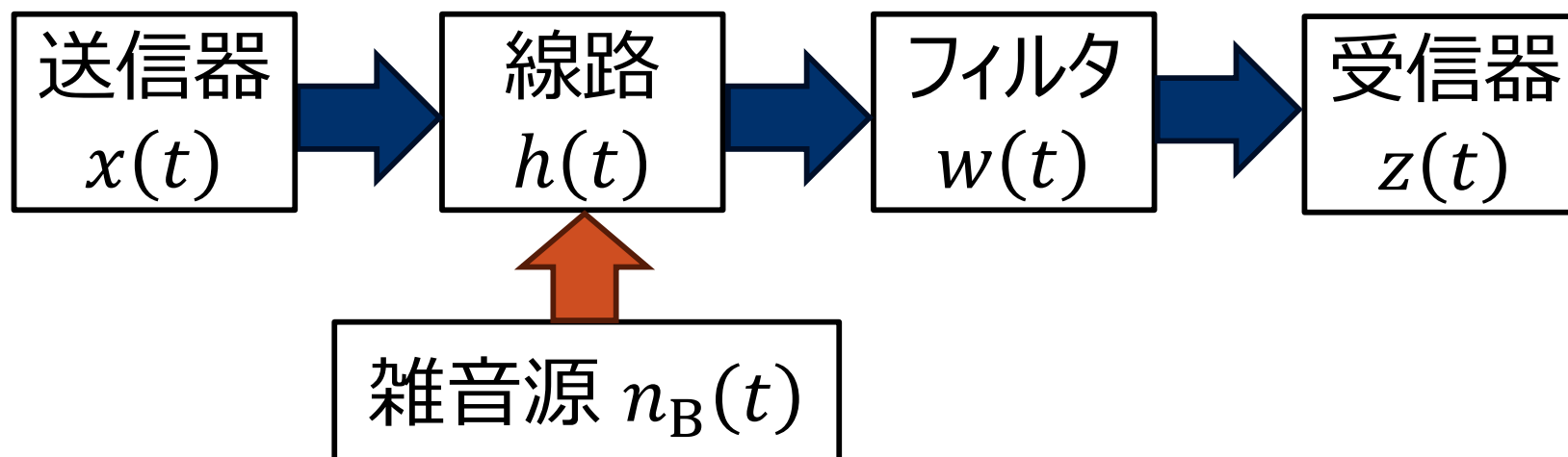
$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} W(f)e^{j2\pi ft} df = \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi f(\tau-t)} df \right]^* \\ &= h^*(\tau - t) \end{aligned} \quad (12-15)$$

目次

1. 等価低減系
2. 整合フィルタ
3. 最適受信
4. 信号の検波

- ◆ 簡単にするため、 $h(t) = w(t) = \delta(t)$ とすると、フィルタ出力は、

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)r(t - \tau)d\tau = x(t) + n_B(t) \quad (12-16)$$



- ◆ 信号 $x(t)$ は雑音 $n_B(t)$ の影響を受ける。

- ◆ $n_B(t)$ が平均値0の加法性白色ガウス雑音 (additive white Gaussian noise, **AWGN**) の場合に、信号 $x(t) \in \pm 1$ が送信され、1が受信されても、1が送信されたとは断言できない。
- ◆ 送られた確率が最も高い信号はどれか、すなわち、最も尤もらしい (もっともらしい) 信号がどれかをを定めることはできる。
- ◆ 「最も尤もらしい」ことを**最尤** (さいゆう) という。

- ◆ 信号が受信されたときに、送った確率の最も高い信号を推定することを、**最大事後確率** (**maximum a posteriori, MAP**)という。
- ◆ 信号 z が受信されたとき、信号 x_i が送信された確率を $P(x_i|z)$ で表し、これを**事後確率**という。
(第5講の条件付き確率参照) これを最大にする x_{\max} を探すことがMAP推定である。

$$\frac{P(x_{\max}|z)}{P(x_i|z)} \geq 1 \text{ for } \forall x_i \neq x_{\max} \quad (12-17)$$

∀は「すべての」の意

◆ (5-18)式のベイズの定理より、

尤度

事前にわからない

$$P(x_i|z) = \frac{P(z|x_i)}{P(z)} P(x_i) \quad (12-18a)$$

$$P(x_{\max}|z) = \frac{P(z|x_{\max})}{P(z)} P(x_{\max}) \quad (12-18b)$$

- ◆ ここで、 $P(z|x_i)$ は信号 x_i が送信されたときに z が受信される確率で、**尤度** (likelihood)という。
- ◆ x_i が送信される確率 $P(x_i)$ を事前に知ることは難しく、MAP推定は困難である。

- ◆ (12-18)式を(12-17)式に代入すると、

$$\frac{P(z|x_{\max}) P(x_{\max})}{P(z|x_i) P(x_i)} \geq 1 \text{ for } \forall x_i \neq x_{\max} \quad (12-19)$$

- ◆ ここで、すべての送信信号の送信確率が等しい $P(x_0) = P(x_1) = \dots = P(x_{N-1})$ とすると、

$$\frac{P(z|x_{\max})}{P(z|x_i)} \geq 1 \text{ for } \forall x_i \neq x_{\max} \quad (12-20)$$

- ◆ となる。これを**最尤推定** (maximum likelihood estimation) という。

- ◆ 伝送路で生じる雑音は、AWGNとみなせるため、尤度は次式で表せる。

教科書はマイナスが抜けている。

$$P(z|x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{|z-x_i|^2}{2\sigma^2}} \quad (12-21)$$

- ◆ 簡単にするため、送信信号 x_i は x_0, x_1 の2値とする。このとき、次式が成り立てば、 x_0 が最尤推定結果となる。

$$P(z|x_0) \geq P(z|x_1) \quad (12-22)$$

◆ (12-22)式に(12-21)式を代入すると、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{|z-x_0|^2}{2\sigma^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{|z-x_1|^2}{2\sigma^2}} \quad (12-23)$$

$$|z - x_0|^2 \leq |z - x_1|^2 \quad (12-24)$$

$$2\operatorname{Re}[z^*(x_1 - x_0)] \leq |x_1|^2 - |x_0|^2 \quad (12-25)$$

◆ (12-24)式は z が x_1 より x_0 に近いことを意味し、
(12-25)式は z が x_1 と x_0 の垂直二等分線を境界として x_0 を含む半平面にあることを意味する。
つまり、 x_0 が最尤推定結果である。

$$\begin{aligned}
& |z - x_0|^2 \leq |z - x_1|^2 \\
& (z - x_0)(z - x_0)^* \leq (z - x_1)(z - x_1)^* \\
& (z - x_0)(z^* - x_0^*) \leq (z - x_1)(z^* - x_1^*) \\
& zz^* - zx_0^* - x_0z^* + x_0x_0^* \leq zz^* - zx_1^* - x_1z^* + x_1x_1^* \\
& -zx_0^* - x_0z^* + |x_0|^2 \leq -zx_1^* - x_1z^* + |x_1|^2 \\
& zx_1^* + x_1z^* - zx_0^* - x_0z^* \leq |x_1|^2 - |x_0|^2 \\
& z(x_1^* - x_0^*) + z^*(x_1 - x_0) \leq |x_1|^2 - |x_0|^2 \\
& z(x_1 - x_0)^* + z^*(x_1 - x_0) \leq |x_1|^2 - |x_0|^2 \\
& [z^*(x_1 - x_0)]^* + z^*(x_1 - x_0) \leq |x_1|^2 - |x_0|^2 \\
& 2\operatorname{Re}[z^*(x_1 - x_0)] \leq |x_1|^2 - |x_0|^2 \quad (12-25)
\end{aligned}$$



◆ 空欄を埋めよ。

受信信号から送信信号を推定する方法として、MAP推定や 推定がある。

推定に用いる尤度は、値が ほど、推定がもっともらしいといえる。

推定は、すべての送信信号の送信確率が という仮定をしている。

目次

1. 等価低減系
2. 整合フィルタ
3. 最適受信
4. 信号の検波

- ◆ ここまで、等価低減系におけるベースバンド信号を用いて、最適な受信について考えてきた。
- ◆ 現実には、(12-1)式の受信信号 $y(t)$ は搬送波帯にあるので、これをベースバンド信号に周波数変換する必要がある。
- ◆ (12-1)式における伝送路のインパルス応答が $g(\tau) = a_0\delta(\tau - \tau_0)$ だとすると、

$$y(t) = a_0s(t - \tau_0) + n(t) \quad (12-26)$$

- ◆ この $y(t)$ から(12-16)式の $z(t)$ に周波数変換することを**検波**という。

- ◆ 変調して送信された高周波信号に、受信機がもつ搬送波を乗算して、ベースバンド信号を得る方法を、**同期検波**という。
- ◆ 第11講p.21の構成図に示したように、(11-13)式の $x(t)$ を $\hat{x}(t)$ に置き換えて、搬送波周波数をもつ余弦波を同相に乗算、正弦波を直交相に乗算すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\zeta_I(t) &= y(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) \\
&= \{a_0 \hat{x}_I(t) \cos[2\pi f_c(t - \tau_0)] - a_0 \hat{x}_Q(t) \sin[2\pi f_c(t - \tau_0)] + n(t)\} \cos(2\pi f_c t + \phi) \\
&= \frac{a_0}{2} \hat{x}_I(t) [\cos(\cancel{4\pi f_c t} - 2\pi f_c \tau_0 + \phi) + \cos(-2\pi f_c \tau_0 - \phi)] \\
&\quad - \frac{a_0}{2} \hat{x}_Q(t) [\sin(\cancel{4\pi f_c t} - 2\pi f_c \tau_0 + \phi) + \sin(-2\pi f_c \tau_0 - \phi)] + n_I(t)
\end{aligned} \tag{12-27}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_Q(t) &= y(t) \sin(2\pi f_c t + \phi) \\
&= \{a_0 \hat{x}_I(t) \cos[2\pi f_c(t - \tau_0)] - a_0 \hat{x}_Q(t) \sin[2\pi f_c(t - \tau_0)] + n(t)\} \sin(2\pi f_c t + \phi) \\
&= \frac{a_0}{2} \hat{x}_I(t) [\sin(\cancel{4\pi f_c t} - 2\pi f_c \tau_0 + \phi) - \sin(-2\pi f_c \tau_0 - \phi)] \\
&\quad - \frac{a_0}{2} \hat{x}_Q(t) [\cos(\cancel{4\pi f_c t} - 2\pi f_c \tau_0 + \phi) - \cos(-2\pi f_c \tau_0 - \phi)] + n_Q(t)
\end{aligned} \tag{12-28}$$

高周波成分は
LPFで除去される。

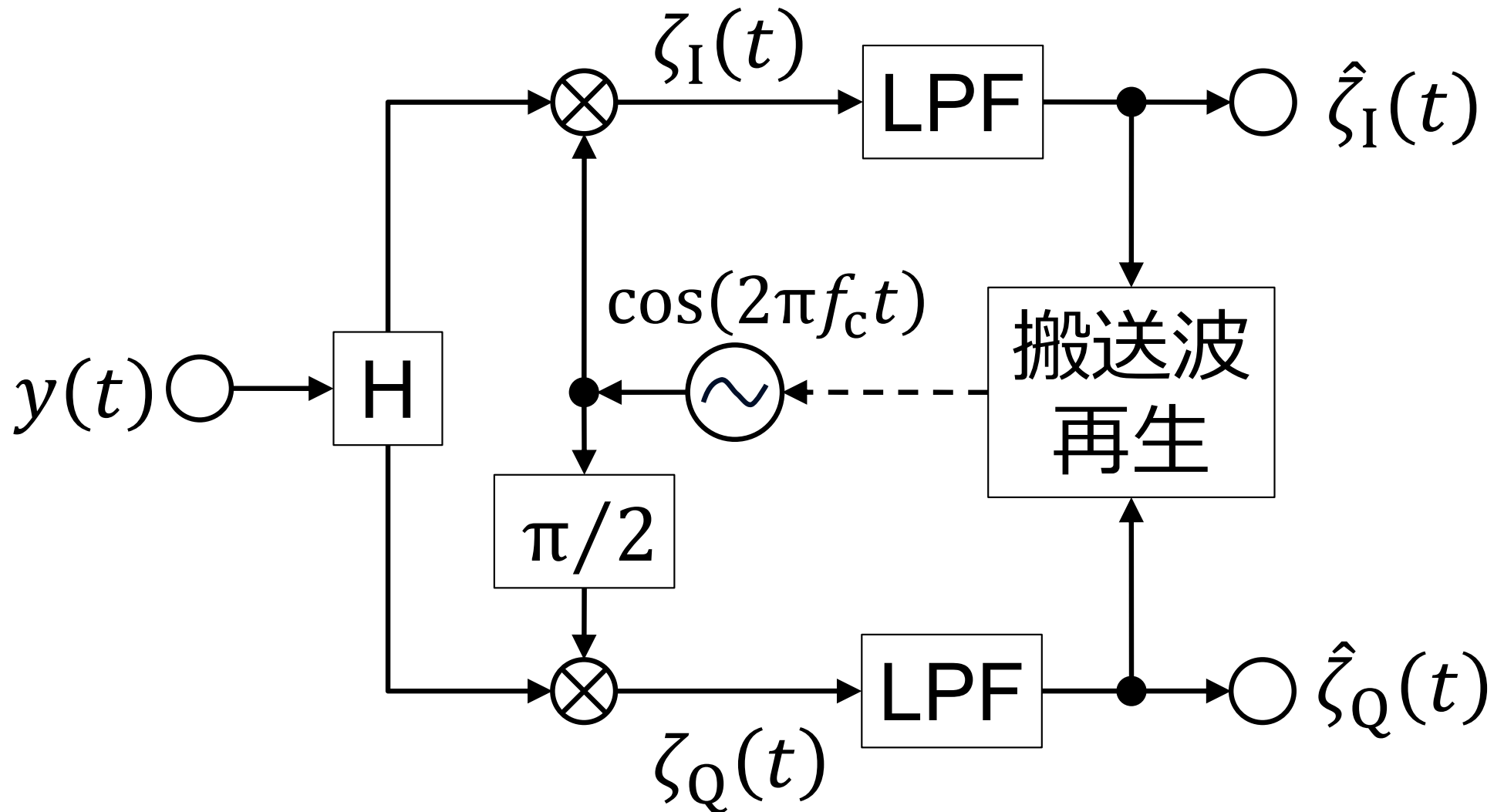
$$\begin{aligned}
\zeta(t) &= \zeta_I(t) - j\zeta_Q(t) \\
&= \frac{a_0}{2} \hat{x}_I(t) \cos(-2\pi f_c \tau_0 - \phi) - \frac{a_0}{2} \hat{x}_Q(t) [\sin(-2\pi f_c \tau_0 - \phi)] + n_I(t) \\
&\quad - j \frac{a_0}{2} \hat{x}_I(t) [-\sin(-2\pi f_c \tau_0 - \phi)] + j \frac{a_0}{2} \hat{x}_Q(t) [-\cos(-2\pi f_c \tau_0 - \phi)] - j n_Q(t) \\
&= \frac{a_0}{2} \hat{x}_I(t) [\cos(2\pi f_c \tau_0 + \phi) - j \sin(2\pi f_c \tau_0 + \phi)] \\
&\quad + j \frac{a_0}{2} \hat{x}_Q(t) [\cos(2\pi f_c \tau_0 + \phi) - j \sin(2\pi f_c \tau_0 + \phi)] + n_I(t) - j n_Q(t) \\
&= \frac{a_0}{2} \hat{x}_I(t) e^{-j(2\pi f_c \tau_0 + \phi)} + j \frac{a_0}{2} \hat{x}_Q(t) e^{-j(2\pi f_c \tau_0 + \phi)} + n_B(t) \\
&= \frac{a_0}{2} e^{-j(2\pi f_c \tau_0 + \phi)} [\hat{x}_I(t) + j \hat{x}_Q(t)] + n_B(t) \\
&= \frac{a_0}{2} e^{-j(2\pi f_c \tau_0 + \phi)} \hat{x}(t) + n_B(t)
\end{aligned}$$

雑音の位相がマイナスで
 $n_B(t) = n_I(t) - j n_Q(t)$
 としても問題ない。

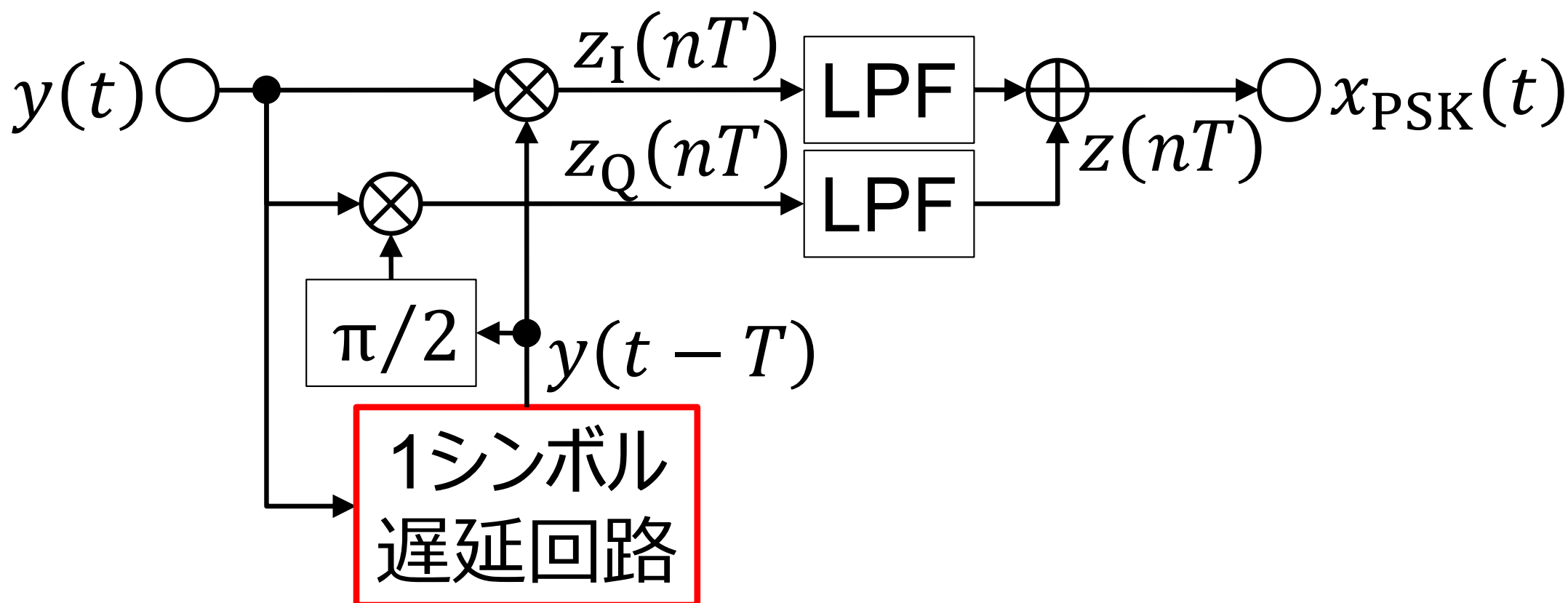
時間で変動する搬送波成分
 は打ち消し合って消える。

(12-29)

◆ 搬送波再生部が余弦波の位相を調整。



- ◆ 同期検波は受信機に発振器が必要である。
一方、遅延検波は受信信号だけでベースバンドを抽出でき、受信機に発振器が不要である。



- ◆ 2^M PSKにおいて、時刻 $t = nT$ に入力された M ビットの情報信号は位相 $\phi(nT)$ に変換される (第11講参照)。この $\phi(nT)$ を次式のように符号化する。

$$m(nT) = m[(n-1)T] + \phi(nT) \quad (12-30)$$

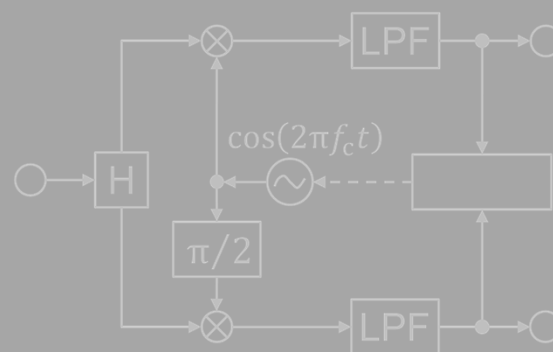
- ◆ 符号化された $m(nT)$ は、1つ前の信号との差が $\phi(nT)$ であることから、差動符号化という。
- ◆ 1シンボル前の信号を遅延回路に保持して、現在の信号と乗算することで、検波できる。

$$\begin{aligned}
z_I(nT) &= y(nT)y[(n-1)T] \\
&= \frac{a_0^2}{2} \left\{ \cos \left[\pi \frac{m(nT) - m[(n-1)T]}{2^M} \right] \right. \\
&\quad \left. + \cos \left[\cancel{4\pi f_c t} + \pi \frac{m(nT) - m[(n-1)T]}{2^M} \right] \right\} + v_I(nT) \quad (12-31a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_Q(nT) &= y(nT)y \left[(n-1)T - \frac{1}{4f_c} \right] \\
&= \frac{-a_0^2}{2} \left\{ \sin \left[\pi \frac{m(nT) - m[(n-1)T]}{2^M} \right] \right. \\
&\quad \left. - \sin \left[\cancel{4\pi f_c t} + \pi \frac{m(nT) - m[(n-1)T]}{2^M} \right] \right\} + v_Q(nT) \quad (12-31b)
\end{aligned}$$

$$z(nT) = \frac{a_0^2}{2} e^{j\phi(nT)} + v(nT) = \frac{a_0^2}{2} x_{\text{PSK}}(nT) + v(nT) \quad (12-32)$$

Thank you.



伝送システム理論

Transmission system theory

第13講 デジタル通信における伝送特性

Lecture 13: Transmission characteristics in digital communications



古川 靖

埼玉工業大学 工学部 情報システム学科

目次

1. 誤り率
2. バイナリ信号の伝送特性
3. 多値デジタル変調信号の誤り率
4. 低雑音時のBER近似
5. PSKおよびQAMの誤り率

- ◆ 最適な受信をしても、伝送路の雑音等により伝送の誤りが生じる。
- ◆ 送信したビットと、受信したビットが異なることを、**ビット誤り**(bit error)という。ビット誤りが発生する確率を**ビット誤り率**(bit error rate, BER)という。
- ◆ 疑似ランダム信号(pseudo random binary sequence, PRBS)を送受信してビット誤り率を測定する計測器を**ビット誤り率テスター**(bit error rate tester, **BERT**)という。

◆ デジタル伝送における雑音または符号誤りについて述べた次の文章のうち、正しいものは である。

- ① (略)
- ② PCM方式では、標本化された信号は（中略）実際の信号との誤差による雑音が生ずる。標本化された信号の振幅が量子化のステップ内に一様に分布しているとする、その量子化ステップの幅を1/2に細かくすれば、量子化雑音電力は4倍に増加する。
- ③ BER（Bit Error Rate）は、測定時間内に伝送された全信号の総ビット数に対する、その間に誤って伝送されたビット数の割合を表した評価尺度であり、SN比の劣化とともに増加する。
- ④ 長時間でのBERの値が同じ回線であっても、符号誤りがバースト的に発生する回線は、符号誤りがランダムに発生する回線と比較して、%ESの値が大きい。

目次

1. 誤り率
2. バイナリ信号の伝送特性
3. 多値デジタル変調信号の誤り率
4. 低雑音時のBER近似
5. PSKおよびQAMの誤り率

- ◆ 電力が P の離散的な値をとるベースバンド信号 $x \in \{\sqrt{P}, -\sqrt{P}\}$ を送る。伝送路のインパルス応答は $\delta(t)$ とし、送受信の搬送波が完全に一致する理想的な同期検波が行われるとする。
- ◆ 信号 \sqrt{P} が送られたのに、 $-\sqrt{P}$ が送られた確率が高いとMAP推定により判断されビット誤りが発生するのは、受信信号 z が次の条件を満たすときである。

$$P(-\sqrt{P}|z) > P(\sqrt{P}|z) \quad (13-1)$$

◆ ベイズの定理(5-18)式を用いて書き換えると、

$$P(z | -\sqrt{P})P(-\sqrt{P}) > P(z | \sqrt{P})P(\sqrt{P}) \quad (13-2)$$

◆ 受信信号 z がしきい値 T_H より大きければ \sqrt{P} 、 T_H より小さければ $-\sqrt{P}$ が送られたと判定する。MAP推定でのビット誤り率 P_e は次式となる。

$$P_e = P(\sqrt{P}) \int_{-\infty}^{T_H} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{|z-\sqrt{P}|^2}{2\sigma^2}} dz + P(-\sqrt{P}) \int_{T_H}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{|z+\sqrt{P}|^2}{2\sigma^2}} dz \quad (13-3)$$

\sqrt{P} が送信されたのに、しきい値 T_H より小さい領域に受信信号 z が存在する確率。

$-\sqrt{P}$ が送信されたのに、しきい値 T_H より大きい領域に受信信号 z が存在する確率。

- ◆ 誤り率 P_e は解析的に表現できないので、次式の誤差関数を定義すると、

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (13-4)$$

$$P_e = \frac{1}{2} \left[P(\sqrt{P}) \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{P} - T_H}{\sqrt{2}\sigma} \right) + P(-\sqrt{P}) \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{P} + T_H}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right] \quad (13-5)$$

\sqrt{P} が送信されたのに、しきい値 T_H より小さい領域に受信信号 z が存在する確率。

$-\sqrt{P}$ が送信されたのに、しきい値 T_H より大きい領域に受信信号 z が存在する確率。

- ◆ここで、ビット誤り率 P_e を最小にするしきい値は次式で与えられる。

$$T_H = \frac{\sigma^2}{2\sqrt{P}} \ln \frac{P(-\sqrt{P})}{P(\sqrt{P})} \quad (13-6)$$

- ◆ $\pm\sqrt{P}$ の送信確率 $P(\pm\sqrt{P})$ によって最適な閾値 T_H が決まる。送信確率を事前に知ることはできないが、多くの通信システムで $P(\sqrt{P}) = P(-\sqrt{P}) \approx 0.5$ であり、 $T_H \approx 0$ である。このとき、MAP推定と最尤推定は一致する。

- ◆ 最尤推定では、2つの信号送信確率が等しく、 $P(\sqrt{P}) = P(-\sqrt{P}) = 0.5$ 、 $T_H = 0$ である。これらを(13-5)式に代入すると、ビット誤り率は次式になる。

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{P}{2\sigma^2}} \right) \quad (13-7)$$

目次

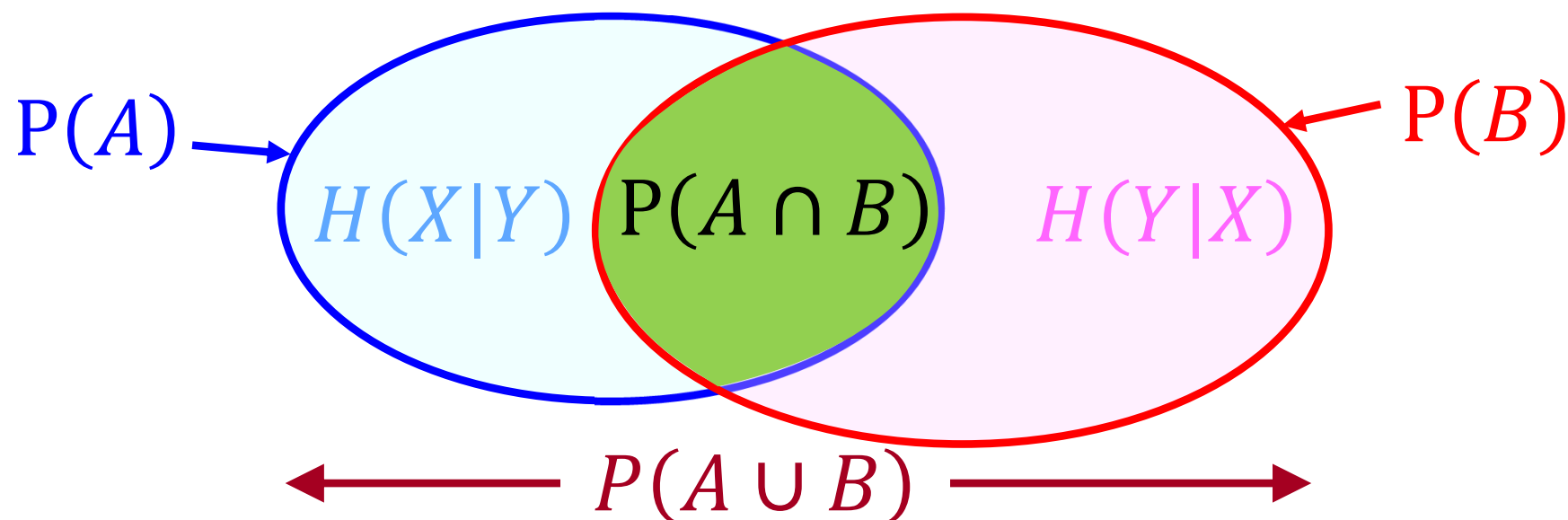
1. 誤り率
2. バイナリ信号の伝送特性
3. 多値デジタル変調信号の誤り率
4. 低雑音時のBER近似
5. PSKおよびQAMの誤り率

- ◆ 第11講で説明したPSKやQAMなどのデジタル変調方式では、ベースバンド信号 $x(t)$ は複素数であり2つ以上の値をとりうる。
- ◆ このような方式のビット誤り率を求めるには、まずシンボル誤り率(**s**ymbol **e**rror **r**ate, SER)を求める。



- ◆ ビット誤り率を求めるため、ユニオンバウンドという近似法を用いる。下図のベン図において A と B の共有部分 $P(A \cap B)$ を無視する方法である。

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (13-8)$$



- ◆ 共有部分の無視は、次式に一般化される。

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_K) \leq \sum_{i=1}^K P(A_i) \quad (13-9)$$

- ◆ 受信信号が送信信号と判定される領域外にあるとシンボル誤りが発生する。 2^M 値デジタル変調されたシンボル a_i のシンボル誤り率 P_s は、

$$P_s(i) = \sum_{k \neq i}^{2^M} \int_{z \in \bar{Z}_k} P(z|a_i) dz \quad (13-10)$$

$k = i$ を除外して和をとる。

シンボル a_k が送信されたと判定される領域。

- ◆ シンボル a_i が送られ、受信機が a_k と判定した場合のビット誤りの数を $W(i \rightarrow k)$ とおくと、そのときのビット誤り率 P_e は次式で与えられる。

$$P_e(i) = \frac{1}{M} \sum_{k \neq i}^{2^M} W(i \rightarrow k) \int_{z \in \bar{Z}_k} P(z|a_i) dz \quad (13-11)$$

- ◆ 2^M 値デジタル変調では1シンボルに M ビットの情報があるので、(13-11)式では積分結果を M で割っている。この積分は容易に計算することができない。

- ◆ 積分を簡単にするため、 a_i と a_k の2値信号のシステムを想定し、 a_i より a_k が送信確率が高いと判定される領域を $D_{i \rightarrow k}$ とおき、その確率を $P(i \rightarrow k)$ とすると次式で表せる。これをペア誤り率という。

$$P(i \rightarrow k) = \int_{D_{i \rightarrow k}} P(z|a_i) dz \quad (13-12)$$

$$D_{i \rightarrow k} = \{z \mid P(a_k|z) \geq P(a_i|z)\} \quad (13-13)$$

- ◆ ここで、 $\bar{z}_k \in D_{i \rightarrow k}$ である。

a_k の確率が a_i がの確率より高いと判定される領域。

- ◆ (13-12)式を(13-11)式に代入すると、シンボル a_i が送られたときのユニオンバウンドが求められる。

$$P_e(i) \leq \frac{1}{M} \sum_{k \neq i}^{2^M} W(i \rightarrow k) P(i \rightarrow k) \quad (13-14)$$

- ◆ ビット誤り率 P_e はすべてのシンボルが送られた場合の特性であるから、次式で近似できる。

$$P_e = \sum_{i=1}^{2^M} P(i) P_e(i) \leq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{2^M} P(i) \sum_{k \neq i}^{2^M} W(i \rightarrow k) P(i \rightarrow k) \quad (13-15)$$

目次

1. 誤り率
2. バイナリ信号の伝送特性
3. 多値デジタル変調信号の誤り率
4. 低雑音時のBER近似
5. PSKおよびQAMの誤り率

- ◆ 雑音電力 σ^2 が小さい場合、受信信号 z は送信シンボル a_i の近くに存在する可能性が高く、隣のシンボル $a_{i'}$ に誤る確率だけを考えればよい。グレイコードの場合、隣は1ビットしか違わないので、誤りビットの数は $W(i \rightarrow i') = 1$ である。(13-15)式より、

$$P_e \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{2^M} P(i) \sum_{i' \in M_b(i)}^{2^M} P(i \rightarrow i') \quad (13-16)$$

シンボル a_i に隣接する
シンボルの指標の集合。

- ◆ (12-1)式に示した受信信号の第1項が信号、第2項が雑音である。それらの電力比(carrier power to noise power ration, **CNR**) γ_{CN} が信号品質の指標として用いられる。
- ◆ 受信信号の周波数帯域1 Hzに含まれる1ビットあたりの受信電力 E_b と雑音電力 N_0 の比 γ_{EN} も、ビットの品質の指標として用いられる。

- ◆ 受信信号電力を P 、ビットレートを R_b 、シンボル周期を T 、1シンボルあたりのビット数を M 、雑音電力を σ^2 、受信のナイキストフィルタの信号帯域幅を W 、フィルタ出力における雑音電力を N_W とする。

$$\gamma_{\text{CN}} = \frac{P}{N_W} = \frac{P}{WN_0} = \frac{P}{\sigma^2} \quad (13-17)$$

$$\gamma_{\text{EN}} = \frac{E_b}{N_0} = \frac{P}{R_b N_0} = \frac{P}{M/T N_0} = \frac{P}{WM N_W} = \frac{1}{M} \gamma_{\text{CN}} \quad (13-18)$$

目次

1. 誤り率
2. バイナリ信号の伝送特性
3. 多値デジタル変調信号の誤り率
4. 低雑音時のBER近似
5. PSKおよびQAMの誤り率

- ◆ PSKの送信シンボルは複素平面の同心円状にあり、円の半径を R とすると隣接するシンボルとの距離は $2R \sin(\pi/2^M)$ で一定である。
- ◆ $P = R^2$ のとき、隣接するシンボルと判定されるペア誤り率 $P_{\text{PSK}}(i \rightarrow i')$ は、

$$\begin{aligned}
 P_{\text{PSK}}(i \rightarrow i') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{R \sin(\pi/2^M)}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{P}{2\sigma^2}} \sin \left(\frac{\pi}{2^M} \right) \right] \quad (13-19)
 \end{aligned}$$

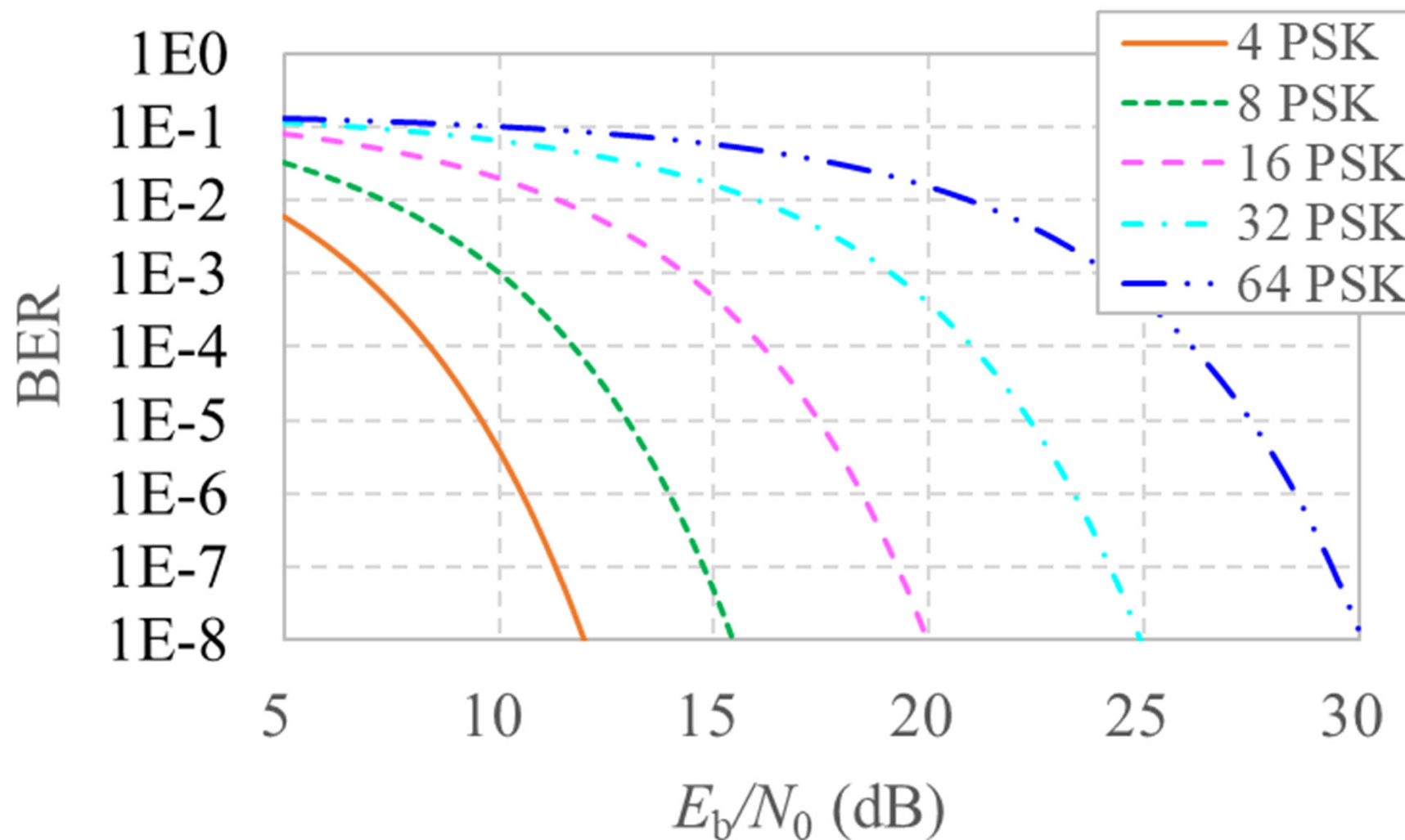
- ◆ (13-19)式を(13-16)式に代入し、(13-18)式を用いると、

$$P_e \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{2^M} P(i) \sum_{i'}^{M_b(i)} P_{\text{PSK}}(i \rightarrow i')$$

$$\approx \frac{1}{M} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{M\gamma_{\text{EN}}} \sin \left(\frac{\pi}{2^M} \right) \right], \quad M \geq 2 \quad (13-20)$$

- ◆ 一般に、PSKの隣接シンボル数は2なので、 i' に関する和は $P_{\text{PSK}}(i \rightarrow i')$ を2倍にする。
- ◆ BPSKの場合は $M = 1$ とすることで導出できる。

◆ PSKのビット誤り率特性を下図に示す。



- ◆ QAMの送信シンボルは複素平面の直交格子上にあり、隣接するシンボル間の距離を D_{\min} とすると、ペア誤り率 $P_{\text{QAM}}(i \rightarrow i')$ は、

$$\begin{aligned} P_{\text{QAM}}(i \rightarrow i') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{D_{\min}/2}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{D_{\min}}{2\sqrt{2}\sigma} \right) \end{aligned} \quad (13-21)$$

- ◆ PSKの(13-19)式と同様に、(13-21)式は i や i' を含まないので、シンボルの位置に依存しない。だが、隣接するシンボル数 $M_b(i)$ には依存する。

- ◆ (13-21)式を(13-16)式に代入すると、 2^M QAMのビット誤り率が得られる。

$$P_e \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{2^M} P(i) \sum_{i' \in M_b(i)} P_{\text{QAM}}(i \rightarrow i')$$

$$\approx \frac{4}{M 2^{M/2-1}} (2^{M/2} - 1) \operatorname{erfc} \left(\frac{D_{\min}}{2\sqrt{2}\sigma} \right), \quad M \geq 2$$

(13-22)

- ◆ ここで、すべてのシンボルの送信確率は等しく、 $P(i) = 1/2^M$ である。

- ◆ 2^M QAMの平均電力は次式で得られる。

$$\sigma^2 = \frac{D_{\min}^2}{12} (2^M - 1) \quad (13-23)$$

- ◆ D_{\min} と信号電力 P との関係は次式で得られる。

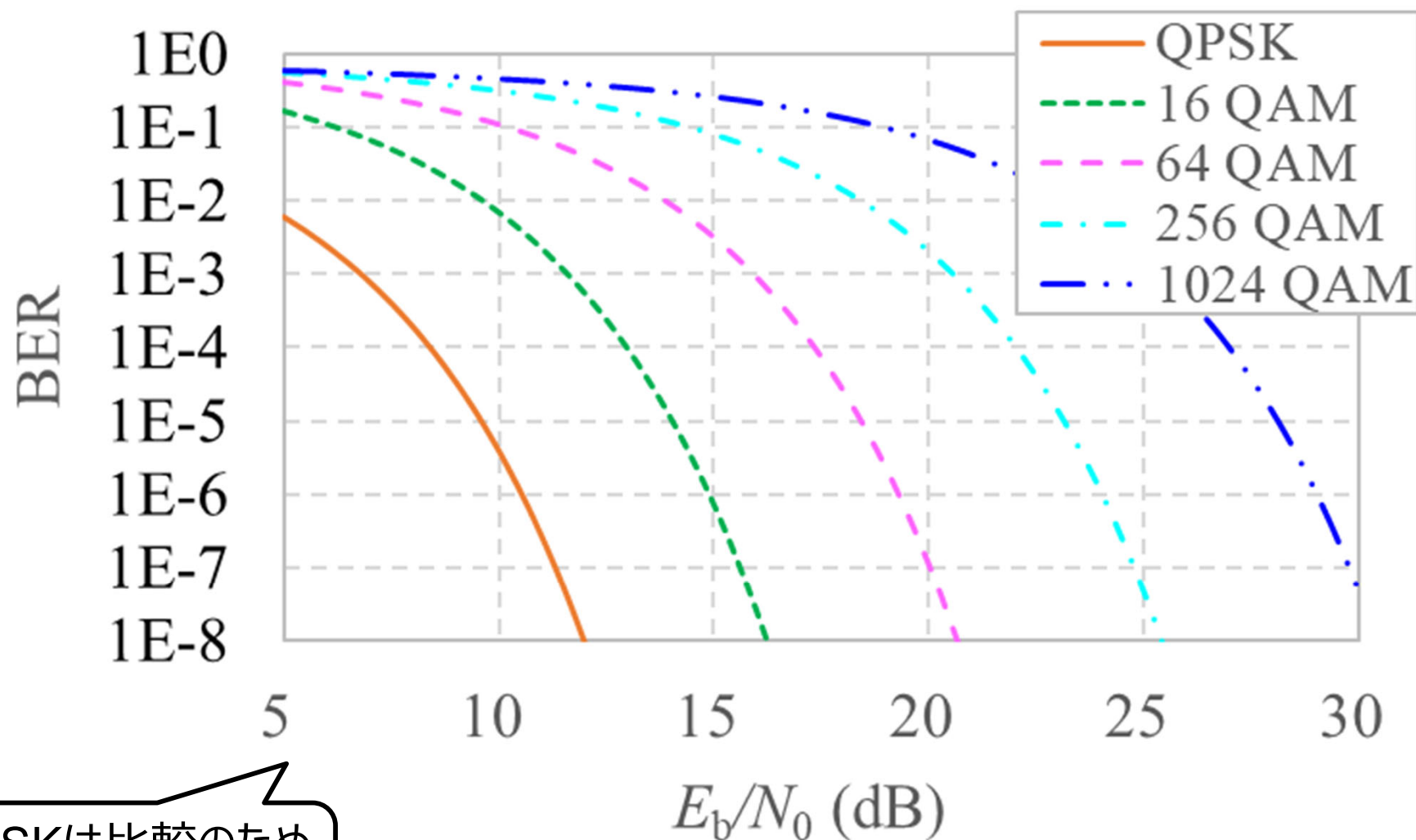
$$D_{\min} = \sqrt{6P / (2^M - 1)} \quad (13-24)$$

- ◆ E_b/N_0 に対する 2^M QAMのビット誤り率は、

$$P_e \approx \frac{4}{M 2^{M/2-1}} (2^{M/2} - 1) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3M}{2(2^M - 1)} \gamma_{\text{EN}}} \right), \quad M \geq 2 \quad (13-25)$$

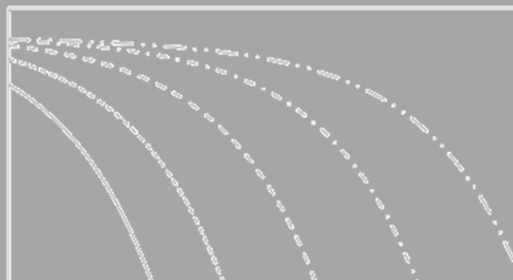
M が偶数となるグレイコードを適用したQAMの場合。

◆ 2^M QAMのビット誤り率特性を下図に示す。



QPSKは比較のため
プロットした。

Thank you.



伝送システム理論

Transmission system theory

第14講 伝送システムの線路

Lecture 14: Transmission system lines



古川 靖

埼玉工業大学 工学部 情報システム学科

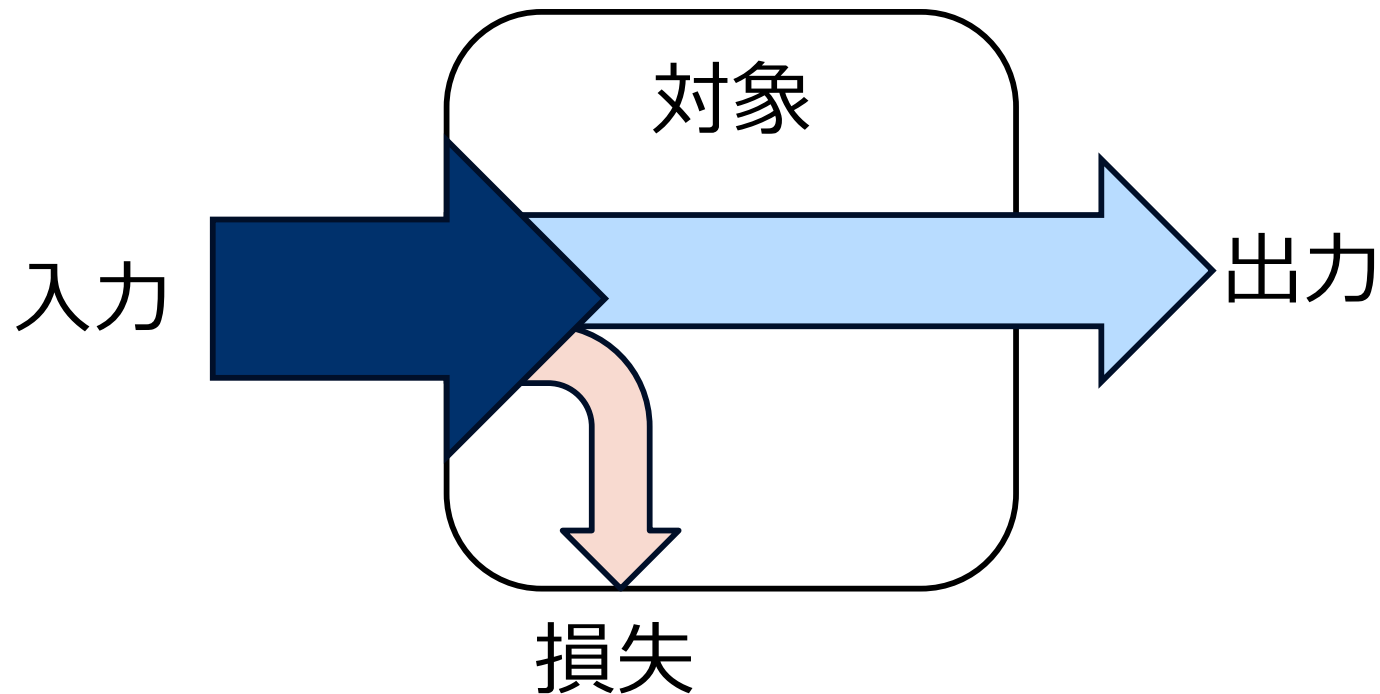
目次

1. 伝送路の損失
2. 熱雑音

- ◆ 第1講で、送信機と受信機の上に伝送路があることを示した。伝送路には有線と無線がある。
- ◆ 有線では光ファイバケーブルや同軸金属ケーブル内を電磁波が伝わる。無線では自由空間を電波が飛ぶ。通常、線路とは有線配線を指す。
- ◆ 線路には伝搬損失があり、信号が減衰する。光ファイバの損失は0.2 dB/kmと小さく、長距離伝送に用いられる。

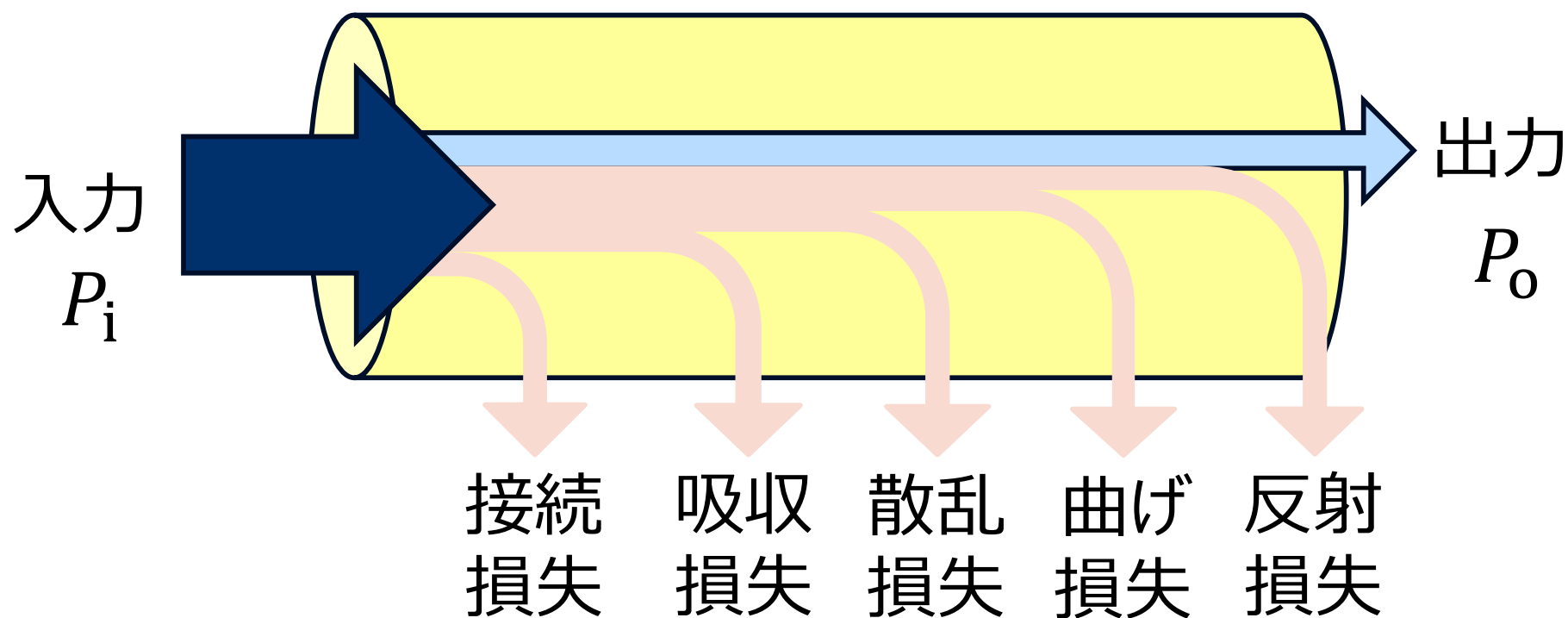
損失とは

- ◆ 入力と出力の間で失われるエネルギーが損失（ロス）である。 反対語は利得（ゲイン）。



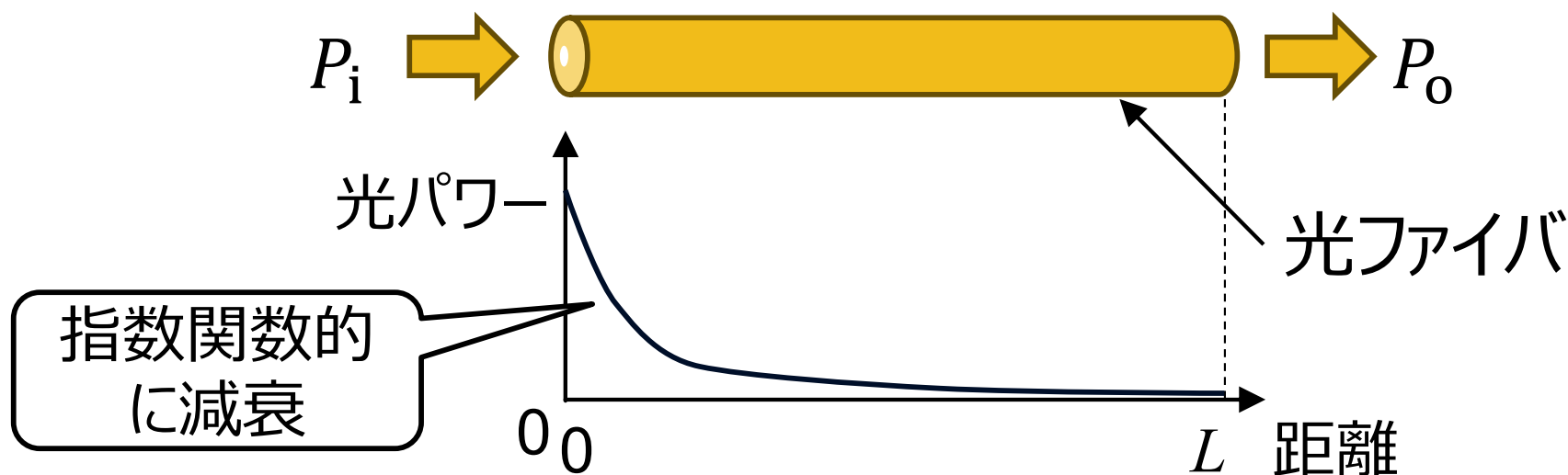
光ファイバにおける損失とは

- ◆ さまざまな損失があるので、送信機から光ファイバへ入力したエネルギーの一部しか、遠方の受信機へ届かない。



- ◆ 光ファイバのパワーは、指数関数的に減衰する。

$$P_o = P_i \exp(-\alpha L) \quad (14-1)$$



- ◆ 近端と遠端でパワーが大きく異なるため、真数ではなく対数で表現したほうがよい。

- ◆ 真数での光パワーを、 P_i (mW)、 P_o (mW)とする。これを対数に変換すると、単位は **dBm** になる。
デシベルミリワット、デービーエム

$$P_i(\text{dBm}) = 10 \log_{10} P_i \quad (14-2a)$$

$$P_o(\text{dBm}) = 10 \log_{10} P_o \quad (14-2b)$$

- ◆ 例えば、 $P_i = 20$ mWのとき、これをdBmに変換すると、

$$\begin{aligned} P_i(\text{dBm}) &= 10 \log_{10} 20 = 10(1 + \log_{10} 2) \\ &\doteq 10 \times 1.301 \doteq 13 \text{ dBm} \end{aligned} \quad (14-3)$$

◆ (14-1)式を対数表記 (デシベル表記) する。

$$10 \log_{10} P_o = 10 \log_{10} P_i + 10 \log_{10} e^{-\alpha L} \quad (14-4a)$$

$$P_o(\text{dBm}) = P_i(\text{dBm}) + 10 \frac{\log_e e^{-\alpha L}}{\log_e 10} \quad (14-4b)$$

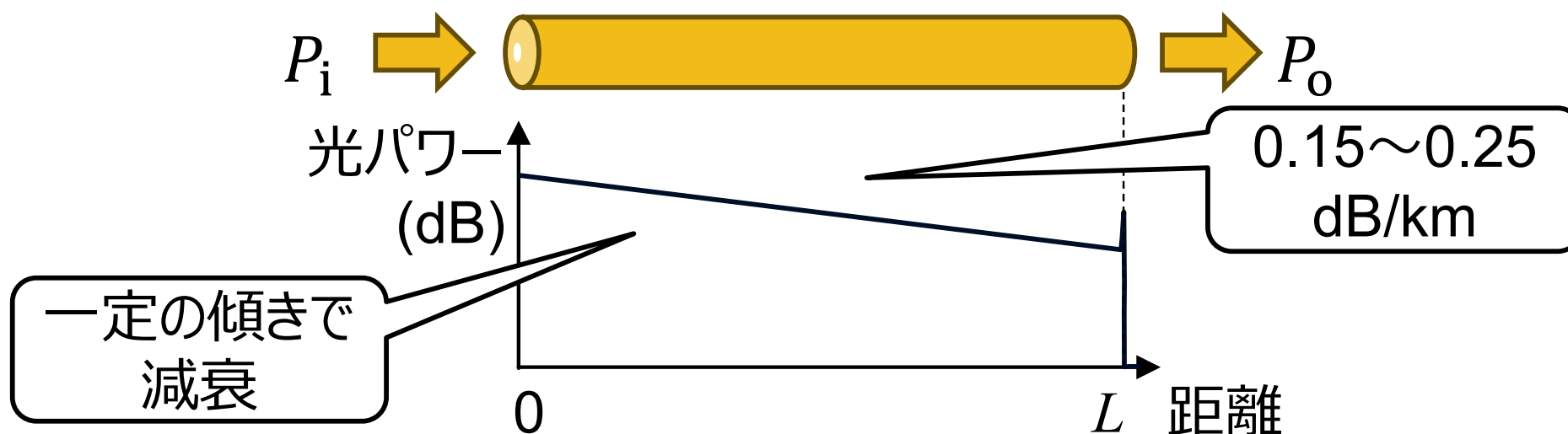
$$\begin{aligned} P_o(\text{dBm}) &= P_i(\text{dBm}) - 4.343\alpha L \\ &= P_i(\text{dBm}) - \alpha_{\text{dB}} L \end{aligned} \quad (14-4c)$$

$$\alpha_{\text{dB}} = 4.343\alpha \text{ (dB/km)} \quad (14-5)$$

◆ 光ファイバの損失は、 $\alpha_{\text{dB}} \approx 0.2 \text{ dB/km}$ 。

◆ 光ファイバ損失は、対数では直線で表される。

$$P_o(\text{dBm}) = P_i(\text{dBm}) - \alpha_{\text{dB}}L \quad (14-6)$$



◆ アナログ方式の多重伝送路において、1回線当たりの平均電力が -20 [dBm]で互いに相関のない信号を1,000回線伝送しているとき、その電力和は、 [dBm]である。

選択肢：

- ① -20 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 20

- ◆ 電力 $P_i = 40 \text{ mW}$ のレーザー光を、減衰係数が $\alpha_{\text{dB}} = 0.15 \text{ dB/km}$ の光ファイバに入射させるとき、距離 $L = 100 \text{ km}$ におけるレーザー光の電力は何 dBm が計算せよ。



◆ 空欄を埋めよ。

信号に、3 dBの利得を与えたとき、信号は

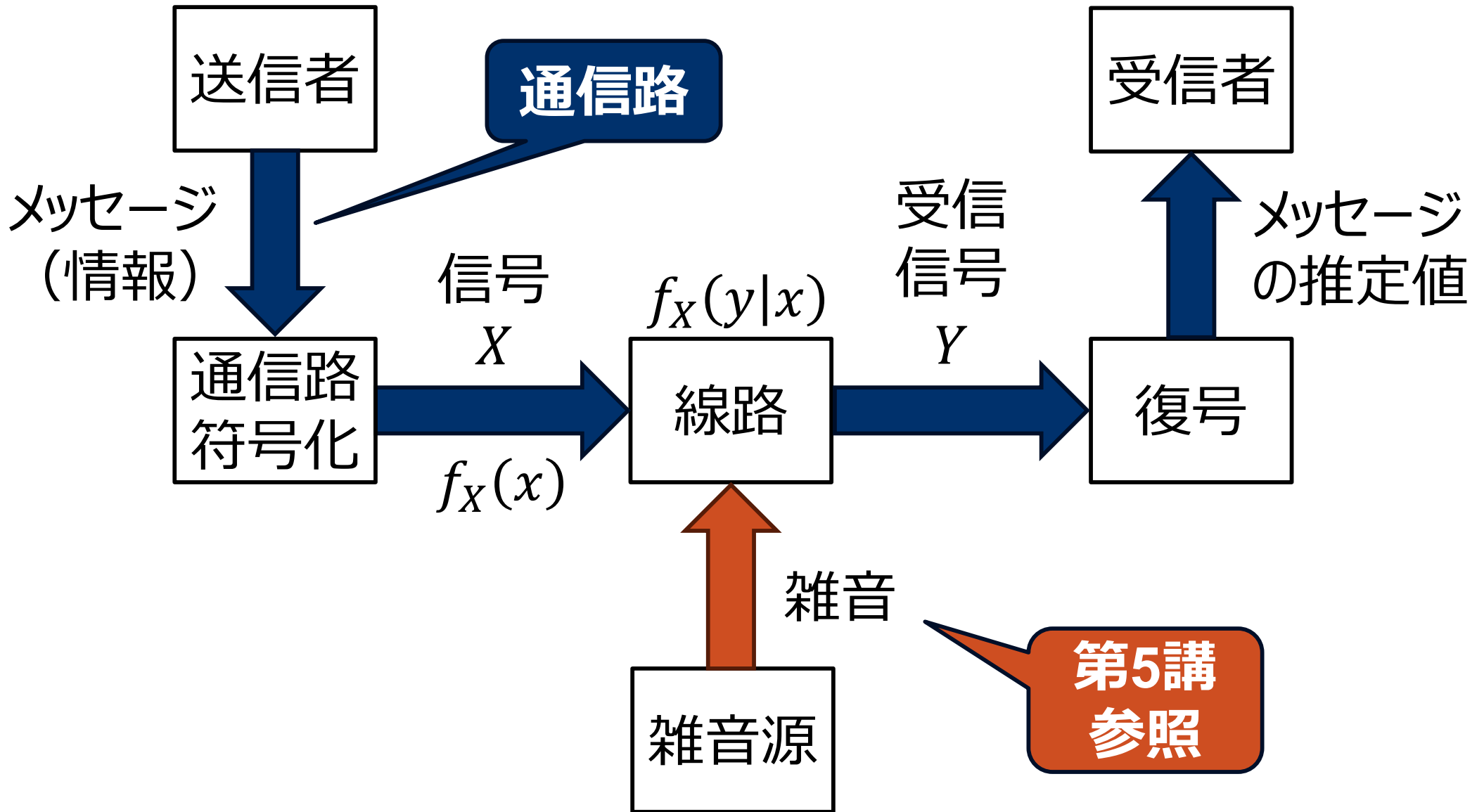
① 倍になる。

信号に、3 dBの損失が生じたとき、信号は

② 倍になる。

目次

1. 伝送路の損失
2. 熱雑音



- ◆ 通信システムでは、線路を伝送する間に雑音の影響を受ける。
- ◆ 光ファイバは電氣的な雑音の影響を受けないが、同軸金属ケーブルは電磁波による影響を受ける。
- ◆ 支配的な雑音は熱雑音 (thermal noise) である。

- ◆ 熱雑音の片側雑音電力スペクトル密度は、ボルツマン定数 $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K と絶対温度 T の積 $k_B T$ により与えられる。例えば、 $T = 300$ K の場合、スペクトルのノイズフロアは、
- $$\begin{aligned} & k_B T \text{ (dB)} \\ &= 10 \log_{10} (1.38 \times 10^{-23} \times 300 \times 1000) \\ &\doteq 173.8 \text{ dBm/Hz} \end{aligned} \quad (14-7)$$
- WからmWへの変換。
- ◆ 雑音の周波数帯域幅が W の場合、雑音電力は $k_B T W$ となる。

- ◆ 前述のように、線路において信号は減衰する。そのため受信機は、増幅器を用いて信号を増幅する。このとき、受信信号の雑音に加えて、増幅器のもつ雑音が加わり、SNRが悪化する。増幅器の入力側SNRと出力側SNRの比 F を雑音指数(noise figure, NF)という。

$$F = \frac{S_{\text{in}}/N_{\text{in}}}{S_{\text{out}}/N_{\text{out}}} \quad (14-8)$$

- ◆ 増幅器の利得を G とすると、信号は G 倍されるので、

$$S_{\text{out}} = GS_{\text{in}} \quad (14-8)$$

- ◆ (14-8)式を(14-7)式に代入すると、

$$N_{\text{out}} = GFN_{\text{in}} = GN_{\text{in}} + N_a \quad (14-9)$$

- ◆ ここで N_a は、増幅器内部雑音とする。入力された雑音 N_{in} が G 倍されて、増幅器雑音 N_a が加わって出力される。

- ◆ 増幅器内部で発生した雑音 N_a が、増幅器の内部ではなく入力側で発生したと考えなおす。雑音 N_a は入力側の雑音 N'_a が G 倍されたものと考えると、

$$N_a = G N'_a \quad (14-10)$$

- ◆ (14-10)式を(14-9)式に代入すると、入力換算雑音 ($N_{in} + N'_a$) を G 倍したものが出力雑音 N_{out} となり、わかりやすい。

$$N_{out} = G(N_{in} + N'_a) \quad (14-11)$$

- ◆ (14-11)式と(14-9)式より、次式が得られる。

$$N'_a = (F - 1)N_{in} \quad (14-12)$$

- ◆ (14-12)式のように、雑音指数 F によって増幅器が発生する雑音を定義することができる。
- ◆ 入力の熱雑音電力密度が $k_B T$ のとき、内部発生雑音を加えた受信機の片側雑音電力密度 N_0 は次式で与えられる。

$$N_0 = Fk_B T \quad (14-13)$$

- ◆ アナログ信号を伝送する場合、大きな妨害となる雑音の一つは中継器などで発生する熱雑音であり、その値(N)は、 $N = kTBGF$ で与えられる。ここで、 k はボルツマン定数、 T は絶対温度、 B は周波数帯域幅、 G は中継器利得、 F は である。

選択肢：

- ① 搬送周波数 ② 変調指数 ③ 雑音指数
④ 信号強度 ⑤ 遮断周波数

Thank you.

